# 2024 高考数学新课标Ⅱ卷

一、选择题

1.已知 $z=-1-i$，则 $|z|=$（　　）

A.0　　B.1　　C.$\sqrt{2}$　　D.2

2.已知命题 $p:\forall x\in R,|x+1|>1$；命题 $q:\exists x>0,x^3=x$，则

A. $p$ 和 $q$ 都是真命题　　B. $\neg p$ 和 $q$ 都是真命题

C. $p$ 和 $\neg q$ 都是真命题　　D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

3.已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1,|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，且 $(\vec{b}-2\vec{a})\perp\vec{b}$，则 $|\vec{b}|=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D.1

4.某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植一种新型水稻，得到各块稻田的亩产量（单位：千克）并整理下表：

| 亩产量 | $[900,950)$ | $[950,1000)$ | $[1000,1050)$ | $[1100,1150)$ | $[1150,1200)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 频数 | 6 | 12 | 18 | 24 | 10 |

根据表中数据，下列结论正确的是（　　）

A.100 块稻田亩产量的中位数小于 1050 千克

B.100 块稻田亩产量低于 1100 千克的稻田所占比例超过 80%

C.100 块稻田亩产量的极差介于 200 千克到 300 千克之间

D.100 块稻田亩产量的平均值介于 900 千克至 1000 千克之间

5.已知曲线$C:x^2+y^2=16(y>0)$，从$C$上任意一点$P$向$x$轴作垂线段$PP'$，$P'$为垂直，则线段$PP'$的中点$M$的轨迹方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$　　　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1(y>0)$

C. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1(y>0)$　　　　D. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{8}=1(y>0)$

6.设函数$f(x)=a(x+1)^2-1,g(x)=\cos x+2ax$，当$x\in(-1,1)$时，曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$恰有一个交点，则$a=$（　　）

A.-1　　　　B. $\frac{1}{2}$　　　　C.1　　　　D.2

7.已知正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的体积为$\frac{52}{3}$，$AB=6,A_1B_1=2$，则$A_1A$与平面$ABC$所成角的正切值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　　　B.1　　　　C.2　　　　D.3

8.设函数$f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若$f(x)\geq 0$，则$a^2+b^2$的最小值为（　　）

A. $\frac{1}{8}$　　　　B. $\frac{1}{4}$　　　　C. $\frac{1}{2}$　　　　D.1

二、多选题

9.对于函数$f(x)=\sin 2x$和$g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，下列正确的有（　　）

A. $f(x)$和$g(x)$有相同零点

B. $f(x)$和$g(x)$有相同最大值

C. $f(x)$和$g(x)$有相同的最小正周期

D. $f(x)$和$g(x)$的图象有相同的对称轴

10.抛物线$C: y^2=4x$的准线为$l$， $P$为$C$上动点，过$P$作$\odot A: x^2+(y-4)^2=1$的一条切线， $Q$有切点，过$P$作$l$的垂线，垂足为$B$，则（　　）

A.$l$与$\odot A$相切

B.当$P,A,B$三点共线时，$|PQ|=\sqrt{15}$

C.当$|PB|=2$时， $PA\perp AB$

D.满足$|PA|=|PB|$的点$P$有且仅有 2 个

11.设函数$f(x)=2x^3-3ax^2+1$，则（　　）

A.当$a>1$时， $f(x)$有三个零点

B.当$a<0$时， $x=0$是$f(x)$的极大值点

C.存在$a,b$，使得$x=b$为曲线$y=f(x)$的对称轴

D.存在$a$，使得点$(1,f(1))$为曲线$y=f(x)$的对称中心

三、填空题

12.记$S_n$为等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和，若$a_3+a_4=7, 3a_2+a_5=5$，则$S_{10}=$

__________.

13.已知$\alpha$为第一象限角， $\beta$为第三象限角， $\tan\alpha+\tan\beta=4, \tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$,

则 $\sin(\alpha+\beta)=$______________

14.在右图的$4\times4$方格表中选 4 个方格,要求每行和每列均恰有一个方格被选中,则共有_________种选法, 在所有符合上述要求的选法中，选中方格中的 4 个数之和的最大值是__________

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | 21 | 31 | 40 |
| 12 | 22 | 33 | 42 |
| 13 | 22 | 33 | 43 |
| 15 | 24 | 34 | 44 |

四、解答题

15.记$\triangle ABC$的内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，已知$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$.

（1）求$A$

（2）若$a=2,\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$，求$\triangle ABC$周长.

16.已知函数$f(x)=\mathrm{e}^{x}-ax-a^{3}$.

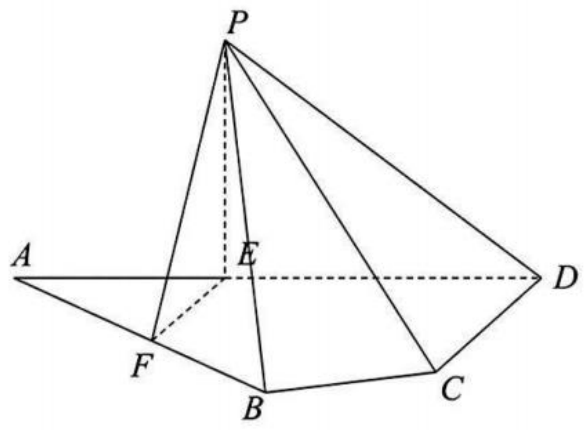
（1）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程

（2）若$f(x)$有极小值，且极小值小于0，求$a$的取值范围.

17.如图，平面四边形$ABCD$中，$AB=8,CD=3,AD=5\sqrt{3},\angle ADC=90^{\circ},\angle BAD=30^{\circ}$，点$E,F$满足$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，将$\triangle AEF$沿$EF$对折至$\triangle PEF$，使得$PC=4\sqrt{3}$.

（1）证明：$EF\perp PD$

（2）求面$PCD$与面$PBF$所成的二面角的正弦值.



18.某投篮比赛分为两个阶段，每个参赛队由两名队员组成，比赛具体规则如下：第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次，若 3 次都未投中，则该队被淘汰，比赛成绩为 0 分；若至少投中一次，则该队进入第二阶段，由该队的另一名队员投篮 3 次，每次投中得 5 分，未投中得 0 分，该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和。某参赛队由甲、乙两名队员组成，设甲每次投中的概率为 $p$，乙每次投中的概率为 $q$，各次投中与否相互独立。

（1）若 $p=0.4, q=0.5$，甲参加第一阶段比赛，求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 的概率

（2）假设 $0<p<q$，

（i）为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大，应该由谁参加第一阶段的比赛

（ii）为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大，应该由谁参加第一阶段比赛

19. 已知双曲线$C:x^2-y^2=m(m>0)$，点$P_1(5,4)$在$C$上，$k$为常数，$0<k<1$，按照如下方式以次构造点$P_n(n=2,3,\cdots)$，过$P_{n-1}$作斜率为$k$的直线与$C$的左支交于点$a_{n-1}$，令$P_n$ 为$a_{n-1}$关于$y$轴的对称点, 记$P_n$的坐标为 $\left(x_n,y_n\right)$

（1）若$k=\dfrac{1}{2}$，求$x_2,y_2$

（2）证明：数列$\left\{x_n-y_n\right\}$是公比为$\dfrac{1+k}{1-k}$的等比数列

（3）设$S_n$为$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$的面积，证明：对任意的正整数$n,S_n=S_{n+1}$.

# 2024 高考数学新课标Ⅱ卷

# 试题解析

一、选择题

1.已知 $z=-1-i$，则 $|z|=$（　　）

A.0　　　　B.1　　　　C. $\sqrt{2}$　　　　D.2

解：$|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

故选 C.

2.已知命题 $p:\forall x\in R,|x+1|>1$； 命题 $q:\exists x>0,x^3=x$， 则

A. $p$ 和 $q$ 都是真命题　　　　B. $\neg p$ 和 $q$ 都是真命题

C. $p$ 和 $\neg q$ 都是真命题　　　　D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

解：对 $p:x=-\dfrac{1}{2}$时，$|-\dfrac{1}{2}|<1$， $p$ 假命题，$\neg p$ 真命题；

对 $q:x=1$时，$1^3=1$， $q$ 真命题，$\neg q$ 假命题；

故选 B.

3.已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1,|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，且 $\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)\perp\vec{b}$，则 $|\vec{b}|=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D.1

解：$(\vec{b}-2\vec{a})\perp\vec{b}\Leftrightarrow(\vec{b}-2\vec{a})\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow|\vec{b}|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$①

$|\vec{a}+2\vec{b}|=2\Leftrightarrow|\vec{a}+2\vec{b}|^2=4\Leftrightarrow|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}=4\Leftrightarrow 4|\vec{b}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}=3$②

由①②得 $|\vec{b}|^2=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow|\vec{b}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故选 B.

4.某农业研究部门在面积相等的100块稻田上种植一种新型水稻，得到各块稻田的亩产量（单位：千克）并整理下表：

| 亩产量 | $[900,950)$ | $[950,1000)$ | $[1000,1050)$ | $[1100,1150)$ | $[1150,1200)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 频数 | 6 | 12 | 18 | 24 | 10 |

根据表中数据，下列结论正确的是（　　）

A.100块稻田亩产量的中位数小于1050千克

B.100块稻田亩产量低于1100千克的稻田所占比例超过80%

C.100块稻田亩产量的极差介于200千克到300千克之间

D.100块稻田亩产量的平均值介于900千克至1000千克之间

解：对于A，根据频数分布表可知，$6+12+18=36<50$，

所以亩产量的中位数不小于1050kg，故A错误；

对于B，亩产量不低于1100kg的频数为$24+10=34$，

所以低于1100kg的稻田占比为$\frac{100-34}{100}=66\%$，故B错误；

对于C，稻田亩产量的极差最大为$1200-900=300$，最小为$1150-950=200$，故C正确；

对于D，由频数分布表可得，亩产量在$[1050,1100)$的频数为$100-(6+12+18+24+10)=30$，

所以平均值为

$\frac{1}{100}\times(6\times925+12\times975+18\times1025+30\times1075+24\times1125+10\times1175)=1067$，故D错误.

故选C.

5.已知曲线$C: x^2+y^2=16(y>0)$，从$C$上任意一点$P$向$x$轴作垂线段$PP'$，$P'$为垂直，则线段$PP'$的中点$M$的轨迹方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1(y>0)$

C. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1(y>0)$　　D. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{8}=1(y>0)$

解：设$M(x_0,y_0)$，则$P'(x_0,0),P(x_0,2y_0)$，$P$是曲线$x^2+y^2=16$上，

则$(x_0)^2+(2y_0)^2=16(y_0>0)$，整理得$M$点得轨迹方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$，

故选 A.

6.设函数$f(x)=a(x+1)^2-1, g(x)=\cos x+2ax$，当$x\in(-1,1)$时，曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$恰有一个交点，则$a=$（　　）

A.-1　　B.$\frac{1}{2}$　　C.1　　D.2

解：$f(x)=g(x)\Leftrightarrow ax^2+2ax+a-1=\cos x+2ax\Leftrightarrow ax^2+a-1=\cos x$；

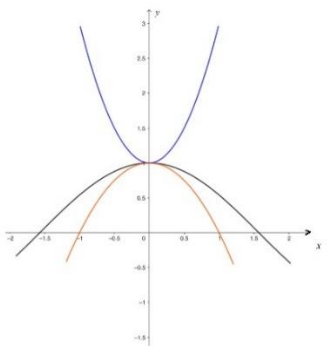
设$F(x)=ax^2+a-1, G(x)=\cos x, x\in(-1,1)$，问题转化为$F(x),G(x)$有唯一交点.

黑色为$G(x)=\cos x$，由于$F(x),G(x)$都为偶函数，对于二次函数$F(x)$，

当$a\neq 0$时，$F(0)=a-1=1$，则$a=2$；

当$a=0$时，$F(x)=-1$, 显然无交点；

综上$a=2$.



7.已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{52}{3}$，$AB=6, A_1B_1=2$，则 $A_1A$ 与平面 $ABC$ 所成角的正切值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B.1　　C.2　　D.3

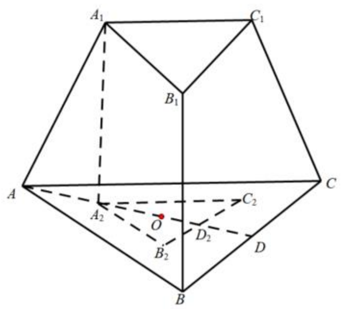
三棱台的体积 $V=\frac{1}{3}h(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}S_{下}})=\frac{52}{3}$，其中 $S_{上}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2$，$S_{下}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6^2$

解得 $h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$AO=\frac{2}{3}AD=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}AB=2\sqrt{3}$，$A_2O=\frac{2}{3}A_2D_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}A_2B_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$AO-A_2O=AA_2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

在直角三角形 $\Delta A_1AA_2$ 中，$h=A_1A_2=AA_2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

故 $A_1A$ 与平面 $ABC$ 所成的角的正切值为1




故选：$B$．

8.设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若 $f(x)\geq 0$，则 $a^2+b^2$ 的最小值为（　　）

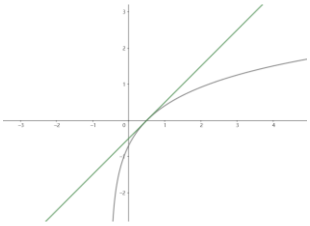
A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D.1

解：$(x+a)\ln(x+b)\geqslant 0$ 恒成立，

可通过分析两个函数 $(x+a)$、$\ln(x+b)$ 的符号变化入手

两个函数均单调递增，零点分别为 $x=-a$、$x=1-b$

当且仅当两个零点重合时，可满足 $(x+a)\ln(x+b)\geqslant 0$，如下图



此时 $-a=1-b$

则 $a^2+b^2=2b^2-2b+1$，当 $b=\frac{1}{2}$ 时取最小值，为 $\frac{1}{2}$

故选：$C$．

二、多选题

9.对于函数 $f(x)=\sin 2x$ 和 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，下列正确的有（　　）

A. $f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同零点

B. $f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同最大值

C. $f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同的最小正周期

D. $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象有相同的对称轴

解：$f(x)=\sin 2x$，$g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\sin[2(x-\frac{\pi}{8})]$

即 $f(x)=\sin 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 可得 $g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\sin[2(x-\frac{\pi}{8})]$ 的图像

$f(x)=\sin 2x$ 的四分之一周期为 $\frac{1}{4}T=\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$，平移量不到四分之一周期

故两个函数的零点、对称轴不相同，

由平移图像关系可知，两个函数的最大值相同，函数的最小正周期相同

故选：$BC$．

10.抛物线 $C:y^2=4x$ 的准线为 $l$，$P$ 为 $C$ 上动点，过 $P$ 作 $\odot A:x^2+(y-4)^2=1$ 的一条切线，$Q$ 有切点，过 $P$ 作 $l$ 的垂线，垂足为 $B$，则（　　）

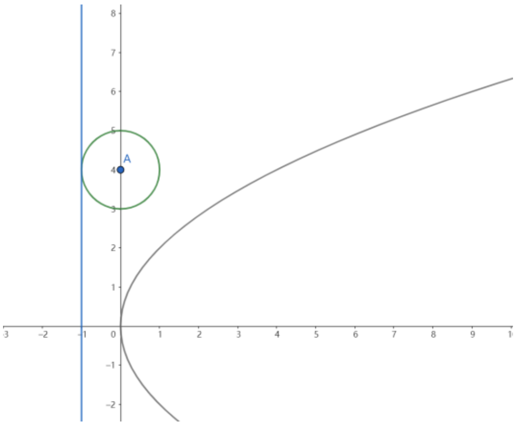
A.$l$ 与 $\odot A$ 相切

B.当 $P,A,B$ 三点共线时，$|PQ|=\sqrt{15}$

C.当 $|PB|=2$ 时，$PA\perp AB$

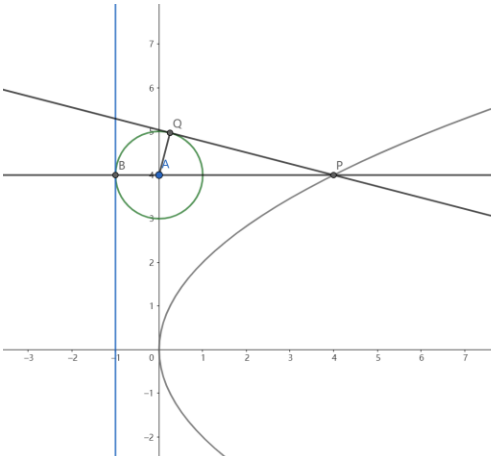
D.满足 $|PA|=|PB|$ 的点 $P$ 有且仅有 2 个

解：




点 $A(0,4)$ 到准线 $l:x=-1$ 的距离为 $1$ 等于圆 $A$ 的半径，故选项 $A$ 正确；

当 $P$，$A$，$B$ 三点共线时，如图所示




此时点 $A(0,4)$，点 $P(4,4)$，$PA=4$，切线长 $PQ=\sqrt{PA^2-1}=\sqrt{15}$，故选项 $B$ 正确；

当 $PB=2$ 时，$x_P=1$，$y_P=\pm2$，点 $P(1,2)$ 或 $P(1,-2)$，对应的点 $B$ 为 $(-1,2)$ 或 $(-1,-2)$

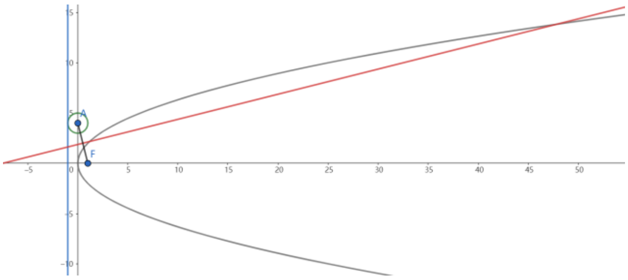
当 $P(1,2)$ 时，$AB=AP=\sqrt{5}$，$PB=2$，不满足 $PA\perp AB$，故选项 $C$ 正确；

设抛物线的焦点为 $F(1,0)$，由抛物线定义可得 $PB=PF$，

满足 $PA=PB=PF$ 的点 $P$ 需在线段 $PF$ 的垂直平分线上，

$PF$ 的垂直平分线： $y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{8}$，与抛物线联立可得判别式大于零，

故满足题意的点 $P$ 两个



故选： $ABD$.

11.设函数 $f(x)=2x^3-3ax^2+1$，则（　　）

A.当 $a>1$ 时， $f(x)$ 有三个零点

B.当 $a<0$ 时， $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C.存在 $a,b$，使得 $x=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

D.存在 $a$，使得点 $(1,f(1))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

解：选项 A：当 $a>1$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 递增， $(0,a)$ 递减， $(a,+\infty)$ 递增

$f(-\infty)=-\infty$， $f(0)=1$， $f(a)=1-a^3<0$， $f(+\infty)=+\infty$，此时三次函数有三个零点，选项 A 正确；

当 $a<0$ 时， $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，故选项 $B$ 错误；

三次函数 $f(x)=2x^3-3ax^2+1$ 为中心对称图形，不可能轴对称，故选项 $C$ 错误；

对称中心横坐标为二阶导的零点即 $x=\frac{a}{2}$，此时对称中心为 $\left(\frac{a}{2},f(\frac{a}{2})\right)$

当 $a=2$ 时，即选项 $D$ 正确；

故选： $AD$.

三、填空题

12. 记 $S_n$ 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，若 $a_3+a_4=7, 3a_2+a_5=5$，则 $S_{10}=$

__________.

解：因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，

所以 $a_3+a_4=2a_1+5d=7$

$3a_2+a_5=4a_1+7d=5$

所以 $a_1=-4, d=3$

所以 $S_{10}=10a_1+45d=95$

13. 已知 $\alpha$ 为第一象限角，$\beta$ 为第三象限角，$\tan\alpha+\tan\beta=4, \tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$，

则 $\sin(\alpha+\beta)=$____________

解：$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{4}{-\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}$

$\because 2k\pi<\alpha<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, \pi+2k\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$

$\therefore \pi+4k\pi<\alpha+\beta<2\pi+4k\pi$

所以 $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

14. 在右图的 $4\times4$ 方格表中选 4 个方格，要求每行和每列均恰有一个方格被选中，则共有_________种选法，在所有符合上述要求的选法中，选中方格中的 4 个数之和的最大值是__________

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | 21 | 31 | 40 |
| 12 | 22 | 33 | 42 |
| 13 | 22 | 33 | 43 |
| 15 | 24 | 34 | 44 |

答案：24;112

**解析：**(1) 在四列中分别取一格，分别取第一、二、三、四行中的某一格，即相当于把取出的格子排序。故 $A_4^4=24$ 种选法.

四、解答题

15.记$\triangle ABC$的内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，已知$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$.

（1）求$A$

（2）若$a=2,\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$，求$\triangle ABC$周长.

解：（1）$\because \sin A+\sqrt{3}\cos A=2\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=2$，

$\therefore A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即$A=\frac{\pi}{6}$

（2）$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}b}{\sin 2B}=4$

$\therefore \frac{\sqrt{2}b}{2\sin B\cos B}=\frac{b}{\sin B}$，即$\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

则$B=\frac{\pi}{4},C=\frac{7\pi}{12}$

$\therefore b=4\sin B=2\sqrt{2}$，$c=4\sin C=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

$\therefore C_{\triangle ABC}=2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}$

16.已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-ax-a^3$.

（1）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程

（2）若$f(x)$有极小值，且极小值小于0，求$a$的取值范围.

解：（1）$f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，$f'(x)=\mathrm{e}^x-1$

所以$f(1)=e-2$，$k=f'(1)=\mathrm{e}-1$

所以切线方程为$y-(e-2)=(e-1)(x-1)$，

即$y=(e-1)x-1$

（2）$f'(x)=\mathrm{e}^x-a$

①若$a\le 0$，则$f'(x)$恒大于0，即$f(x)$在R上单调增，无极小值，舍去

②在$a>0$时，$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减，在$(\ln a,+\infty)$上单调递增，

则极小值 $f\left(\ln a\right)=a-a\ln a-a^3<0$

令 $h(x)=1-\ln x-x^2$， $h'(x)=-\dfrac{1}{x}-2x<0$，所以 $h(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减

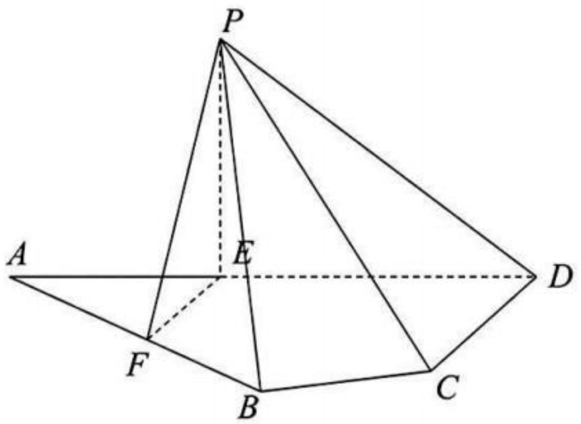
因为 $h(1)=0$，所以在 $\left(0,1\right)$ 上 $h(x)>0$，$\left(1,+\infty\right)$ 上 $h(x)<0$

所以对于方程 $a\left(1-\ln a-a^2\right)<0$ 的解集为 $\left(1,+\infty\right)$

17. 如图，平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=8,CD=3,AD=5\sqrt{3},\angle ADC=90^\circ,\angle BAD=30^\circ$，点 $E,F$ 满足 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，将 $\triangle AEF$ 沿 $EF$ 对折至 $\triangle PEF$，使得 $PC=4\sqrt{3}$.

（1）证明：$EF\perp PD$

（2）求面 $PCD$ 与面 $PBF$ 所成的二面角的正弦值.




解：（1）$AE=\dfrac{2}{5}AD=2\sqrt{3},AF=\dfrac{1}{2}AB=4$，又 $\angle BAD=30^\circ$，

所以 $EF=2,EF\perp AD$，即 $EF\perp PE$，

又 $AD\cap PE=E$，$AD,PE\subset$ 面 $PED$，

所以 $EF\perp$ 面 $PED$，又 $PD\subset$ 面 $PED$，

所以 $EF\perp PD$

（2）因为 $PE=2\sqrt{3},PC=4\sqrt{3},CE=6$

所以 $EC\perp PE$，又 $EF\perp PE$，$AD\cap EF=E$，$EF,EC\subset$ 面 $ABCD$，

所以 $PE\perp$ 面 $ABCD$

以 E 为坐标原点，$\overrightarrow{EF}$ 为 x 轴正方向，$\overrightarrow{ED}$ 为 y 轴正方向，$\overrightarrow{EP}$ 为 z 轴正方向建立坐标系

平面 $PBF$ 交坐标轴于 $P,F,A$ 三点，$P\left(0,0,2\sqrt{3}\right)$，$F\left(2,0,0\right)$，$A\left(0,-2\sqrt{3},0\right)$

所以平面 $PBF$ 的平面方程为 $\frac{x}{2}+\frac{y}{-2\sqrt{3}}+\frac{z}{2\sqrt{3}}=1$

所以平面 $PBF$ 的一个法向量 $n_A=\left(\sqrt{3},-1,1\right)$

平面 $PCD$ 平行于 x 轴，与 y 轴的交点为 D，与 z 轴的交点为 P

所以平面 $PCD$ 的平面方程为 $\frac{y}{3\sqrt{3}}+\frac{z}{2\sqrt{3}}=1$

所以平面 $PCD$ 的一个法向量 $n_B=\left(0,2,3\right)$

面 $PCD$ 与面 $PBF$ 所成的二面角的余弦值 $\left|\cos\theta\right|=\frac{1}{\sqrt{65}}$

所以面 $PCD$ 与面 $PBF$ 所成的二面角的正弦值为 $\frac{8}{\sqrt{65}}=\frac{8\sqrt{65}}{65}$

18.某投篮比赛分为两个阶段，每个参赛队由两名队员组成，比赛具体规则如下：第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次，若 3 次都未投中，则该队被淘汰，比赛成绩为 0 分；若至少投中一次，则该队进入第二阶段，由该队的另一名队员投篮 3 次，每次投中得 5 分，未投中得 0 分，该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和。某参赛队由甲、乙两名队员组成，设甲每次投中的概率为 $p$，乙每次投中的概率为 $q$，各次投中与否相互独立。

（1）若 $p=0.4,q=0.5$，甲参加第一阶段比赛，求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 的概率

（2）假设 $0<p<q$，

（i）为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大，应该由谁参加第一阶

段的比赛

（ii）为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大，应该由谁参加第一阶段比赛

解：（1）不妨记第一阶段通过的概率为$P_1$，记第二阶段得到不少于 5 分的概率为$P_2$

则$P_1=1-0.6^3$；$P_2=1-0.5^3$

即甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 的概率为

$P_1\cdot P_2=(1-0.6^3)(1-0.5^3)=0.686$

（2）（i）①若甲参加第一阶段的比赛，则队伍进入第二阶段的概率为：$1-(1-p)^3$

第二阶段拿到 15 分的概率为$q^3$;队伍的比赛成绩记为$P_3$，则$P_3$
$=[1-(1-p)^3]\ q^3$

②若乙参加第一阶段的比赛，则队伍进入第二阶段的概率为：$1-(1-q)^3$

第二阶段拿到 15 分的概率为$p^3$;队伍的比赛成绩记为$P_4$，则$P_4$
$=[1-(1-q)^3]\ p^3$

$P_3-P_4=[1-(1-p)^3]\ q^3-[1-(1-q)^3]\ p^3$

$=(p^3q^3-3p^2q^3+3pq^3)-(p^3q^3-3q^2p^3+3qp^3)$

$=3p^2q^2(p-q)+3pq(q^2-p^2)$

$=3pq(p-q)(pq-p-q)$

因为$0<p<q<1$,则$p-q<0, pq-p-q<0$，

则$P_3-P_4>0$，即当甲参加第一阶段比赛时，甲乙这支队伍比赛成绩为 15 分的概率最大

（2）（ii）首先考虑甲先参加比赛的情况，则进入第二阶段的概率为$1-(1-p)^3$；

第二阶段中，设乙投中的次数为 $X$ ，得分为 $Y$ ，则 $Y=5X$ ，且 $X\sim B(3,q)$ ，则

$E(X)=3q$ ， $E(Y)=3E(X)=15q$ ；则甲先参加比赛的得分期望为

$[1-(1-p)^3]E(Y)=15[1-(1-p)^3]q$ ；

同理可得乙先参加比赛的得分期望为 $[1-(1-q)^3]E(Y)=15[1-(1-q)^3]p$ ；

$15[1-(1-p)^3]q-15[1-(1-q)^3]p=15pq[(p^2-3p+3)-(q^2-3q+3)]=15pq[(p+q)(p-q)-3(p-q)]$

$=15pq[(p+q)(p-q)-3(p-q)]=15pq(p-q)(p+q-3)$

由于 $p-q<0,p+q-3<0$

所以， $15[1-(1-p)^3]q>15[1-(1-q)^3]p$ ，即甲先参加比赛的得分期望更高。

19. 已知双曲线 $C:x^2-y^2=m(m>0)$ ，点 $P_1(5,4)$ 在 $C$ 上，$k$ 为常数，$0<k<1$，按照如下方式依次构造点 $P_n(n=2,3,\cdots)$ ，过 $P_{n-1}$ 作斜率为 $k$ 的直线与 $C$ 的左支交于点 $a_{n-1}$，令 $P_n$ 为 $a_{n-1}$ 关于 $y$ 轴的对称点, 记 $P_n$ 的坐标为 $\left(x_n,y_n\right)$

（1）若 $k=\frac{1}{2}$，求 $x_2,y_2$

（2）证明：数列 $\{x_n-y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列

（3）设 $S_n$ 为 $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ 的面积，证明：对任意的正整数 $n,S_n=S_{n+1}$.

解：(1) 将点 $P_1(5,4)$ 代入双曲线方程，得 $m=9$. 则双曲线方程为 $x^2-y^2=9$.

可得双曲线左顶点坐标为 $(-3,0)$. 注意到过 $(5,4)$ 与 $(-3,0)$ 的直线斜率为 $\frac{4-0}{5-(-3)}=\frac{1}{2}$，可知 $(-3,0)$ 就是 $a_1$ 点，故 $P_2(3,0)$.

所以 $x_2=3,y_2=0$

(2) 由 $k=\frac{y_n-y_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}$, 得 $1+k=\frac{x_n+x_{n+1}+y_n-y_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}, 1-k=\frac{x_n+x_{n+1}-y_n+y_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}$

故 $\frac{1+k}{1-k}=\frac{x_n+x_{n+1}+y_n-y_{n+1}}{x_n+x_{n+1}-y_n+y_{n+1}}$

两边同时乘以 $\frac{x_n-y_n}{x_{n+1}-y_{n+1}}$

得$\frac{1+k}{1-k}\cdot\frac{x_n-y_n}{x_{n+1}-y_{n+1}}=\frac{x_n+x_{n+1}+y_n-y_{n+1}}{x_n+x_{n+1}-y_n+y_{n+1}}\cdot\frac{x_n-y_n}{x_{n+1}-y_{n+1}}=$

$\frac{(x_n+y_n)(x_n-y_n)+(x_{n+1}-y_{n+1})(x_n-y_n)}{(x_n-y_n)(x_{n+1}-y_{n+1})+(x_{n+1}-y_{n+1})(x_{n+1}-y_{n+1})}=\frac{9+(x_{n+1}-y_{n+1})(x_n-y_n)}{(x_n-y_n)(x_{n+1}-y_{n+1})+9}=1.$

其中倒数第二个等号应用了$(x_n+y_n)(x_n-y_n)=(x_n-y_n)(x_{n+1}-y_{n+1})=9$，

这是来自$P_n$和$P_{n+1}$都在双曲线上这个条件.

因此$\frac{x_{n+1}-y_{n+1}}{x_n-y_n}=\frac{1+k}{1-k}$，即$\{x_n-y_n\}$是以$\frac{1+k}{1-k}$为公比的等比数列.

(3) 记 $S=S_{\Delta P_nP_{n+1}P_{n+2}}=\frac{1}{2}|(x_{n+1}-x_n)(y_{n+1}-y_{n+2})-(x_{n+1}-x_{n+2})(y_{n+1}-y_n)|$

考虑到$k=\frac{y_n-y_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}=\frac{y_{n+1}-y_{n+2}}{x_{n+1}+x_{n+2}}$，故$y_{n+1}-y_{n+2}=k(x_{n+1}+x_{n+2}),y_n-y_{n+1}=k(x_n+x_{n+1})$，代入$S$的表达式

$$S=\frac{k}{2}|(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}+x_{n+2})+(x_{n+1}-x_{n+2})(x_n+x_{n+1})|$$
$$=k|x_{n+1}^2-x_nx_{n+2}|$$

记$\frac{1+k}{1-k}=t$

由第二问结论可得 $x_n-y_n=(x_1-y_1)\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{n-1}=\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{n-1}=t^{n-1}$，而$x_n+y_n=\frac{x_n^2-y_n^2}{x_n-y_n}=\frac{9}{t^{n-1}}$

两式相加可得$2x_n=t^{n-1}+\frac{9}{t^{n-1}}$，即$x_n=\frac{1}{2}(t^{n-1}+\frac{9}{t^{n-1}})$.

代入$S$的表达式$S=k\left|\frac{1}{4}\left(t^n+\frac{9}{t^n}\right)^2-\frac{1}{2}\left(t^{n-1}+\frac{9}{t^{n-1}}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(t^{n+1}+\frac{9}{t^{n+1}}\right)\right|=$
$\frac{k}{4}\left|\left(t^{2n}+\frac{9}{t^{2n}}+18\right)-\left(t^{2n}+\frac{9}{t^{2n}}+9t^2+\frac{9}{t^2}\right)\right|=\frac{k}{4}|18-\left(9t^2+\frac{9}{t^2}\right)|$.

可见$S$是只与$k$有关的表达式，与$n$无关，所以$S$是定值.