

2024 高考数学新课标 II 卷

一、选择题

1. 已知 $z = -1 - i$, 则 $|z| =$ ()

- A.0 B.1 C. $\sqrt{2}$ D.2

2. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbb{R}, |x+1| > 1$; 命题 $q: \exists x > 0, x^3 = x$, 则

- A. p 和 q 都是真命题 B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
C. p 和 $\neg q$ 都是真命题 D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

3. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 1, |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$, 且 $(\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{b}| =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D.1

4. 某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植一种新型水稻, 得到各块稻田的亩产量 (单位: 千克) 并整理下表:

亩产量	[900,950)	[950,1000)	[1000,1050)	[1100,1150)	[1150,1200)
频数	6	12	18	24	10

根据表中数据, 下列结论正确的是 ()

- A. 100 块稻田亩产量的中位数小于 1050 千克
B. 100 块稻田亩产量低于 1100 千克的稻田所占比例超过 80%
C. 100 块稻田亩产量的极差介于 200 千克到 300 千克之间
D. 100 块稻田亩产量的平均值介于 900 千克至 1000 千克之间

5. 已知曲线 $C: x^2 + y^2 = 16 (y > 0)$, 从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP' , P' 为垂足, 则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 (y > 0)$ B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1 (y > 0)$
C. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1 (y > 0)$ D. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{8} = 1 (y > 0)$

6. 设函数 $f(x) = a(x+1)^2 - 1, g(x) = \cos x + 2ax$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 恰有一个交点, 则 $a =$ ()

- A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

7. 已知正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{52}{3}$, $AB = 6, A_1B_1 = 2$, 则 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3

8. 设函数 $f(x) = (x+a)\ln(x+b)$, 若 $f(x) \geq 0$, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

二、多选题

9. 对于函数 $f(x) = \sin 2x$ 和 $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, 下列正确的有 ()

- A. $f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同零点
B. $f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同最大值
C. $f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同的最小正周期
D. $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象有相同的对称轴

10. 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线为 l , P 为 C 上动点, 过 P 作 $\odot A: x^2 + (y-4)^2 = 1$ 的一条切线, Q 为切点, 过 P 作 l 的垂线, 垂足为 B , 则 ()

A. l 与 $\odot A$ 相切

B. 当 P, A, B 三点共线时, $|PQ| = \sqrt{15}$

C. 当 $|PB| = 2$ 时, $PA \perp AB$

D. 满足 $|PA| = |PB|$ 的点 P 有且仅有 2 个

11. 设函数 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$, 则 ()

A. 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有三个零点

B. 当 $a < 0$ 时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. 存在 a, b , 使得 $x = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称轴

D. 存在 a , 使得点 $(1, f(1))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称中心

三、填空题

12. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_3 + a_4 = 7, 3a_2 + a_5 = 5$, 则 $S_{10} =$ _____.

13. 已知 α 为第一象限角, β 为第三象限角, $\tan \alpha + \tan \beta = 4, \tan \alpha \tan \beta = \sqrt{2} + 1$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____.

14. 在右图的 4×4 方格表中选 4 个方格, 要求每行和每列均恰有一个方格被选中, 则共有 _____ 种选法, 在所有符合上述要求的选法中, 选中方格中的 4 个数

之和的最大值是 _____.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

四、解答题

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$ 。

(1) 求 A

(2) 若 $a = 2, \sqrt{2}b \sin C = c \sin 2B$ ，求 $\triangle ABC$ 周长。

16. 已知函数 $f(x) = e^x - ax - a^3$ 。

(1) 当 $a = 1$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程

(2) 若 $f(x)$ 有极小值，且极小值小于 0，求 a 的取值范围。

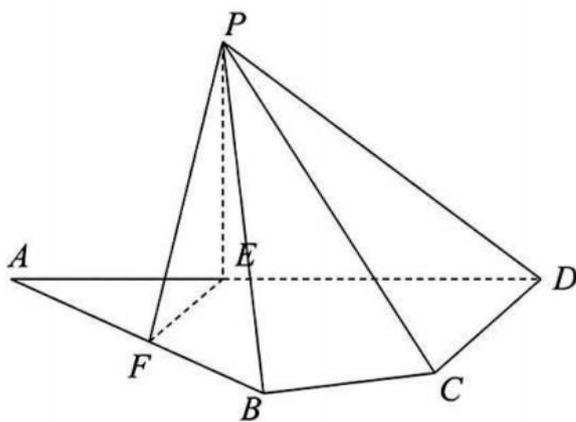
17. 如图，平面四边形 $ABCD$ 中，

$AB = 8, CD = 3, AD = 5\sqrt{3}, \angle ADC = 90^\circ, \angle BAD = 30^\circ$ ，点 E, F 满足

$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ ，将 $\triangle AEF$ 沿 EF 对折至 $\triangle PEF$ ，使得 $PC = 4\sqrt{3}$ 。

(1) 证明： $EF \perp PD$

(2) 求面 PCD 与面 PBF 所成的二面角的正弦值。



18.某投篮比赛分为两个阶段，每个参赛队由两名队员组成，比赛具体规则如下：
第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次，若 3 次都未投中，则该队被淘汰，比赛成绩为 0 分；若至少投中一次，则该队进入第二阶段，由该队的另一名队员投篮 3 次，每次投中得 5 分，未投中得 0 分，该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和。
某参赛队由甲、乙两名队员组成，设甲每次投中的概率为 p ，乙每次投中的概率为 q ，各次投中与否相互独立。

(1) 若 $p=0.4, q=0.5$ ，甲参加第一阶段比赛，求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 的概率

(2) 假设 $0 < p < q$,

(i) 为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大，应该由谁参加第一阶段的比赛

(ii) 为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大，应该由谁参加第一阶段比赛

19. 已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = m(m > 0)$, 点 $P_1(5, 4)$ 在 C 上, k 为常数, $0 < k < 1$, 按照如下方式依次构造点 $P_n (n = 2, 3, \dots)$, 过 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 a_{n-1} , 令 P_n 为 a_{n-1} 关于 y 轴的对称点, 记 P_n 的坐标为 (x_n, y_n)

(1) 若 $k = \frac{1}{2}$, 求 x_2, y_2

(2) 证明: 数列 $\{x_n - y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列

(3) 设 S_n 为 $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 的面积, 证明: 对任意的正整数 $n, S_n = S_{n+1}$.

2024 高考数学新课标 II 卷

试题解析

一、选择题

1. 已知 $z = -1 - i$, 则 $|z| =$ ()

- A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

解: $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

故选 C.

2. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbb{R}, |x+1| > 1$; 命题 $q: \exists x > 0, x^3 = x$, 则

- A. p 和 q 都是真命题 B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
C. p 和 $\neg q$ 都是真命题 D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

解: 对 $p: x = -\frac{1}{2}$ 时, $|\frac{1}{2}| < 1$, p 假命题, $\neg p$ 真命题;

对 $q: x = 1$ 时, $1^3 = 1$, q 真命题, $\neg q$ 假命题;

故选 B.

3. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 1, |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$, 且 $(\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{b}| =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

解: $(\vec{b} - 2\vec{a}) \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{b} - 2\vec{a}) \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{b}|^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ ①

$|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2 \Leftrightarrow |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = 4 \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \Leftrightarrow 4|\vec{b}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ ②

由①②得 $|\vec{b}|^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

故选 B.

4.某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植一种新型水稻，得到各块稻田的亩产量（单位：千克）并整理下表：

亩产量	[900,950)	[950,1000)	[1000,1050)	[1100,1150)	[1150,1200)
频数	6	12	18	24	10

根据表中数据，下列结论正确的是（ ）

- A.100 块稻田亩产量的中位数小于 1050 千克
- B.100 块稻田亩产量低于 1100 千克的稻田所占比例超过 80%
- C.100 块稻田亩产量的极差介于 200 千克到 300 千克之间
- D.100 块稻田亩产量的平均值介于 900 千克至 1000 千克之间

解：对于 A，根据频数分布表可知， $6+12+18=36<50$ ，

所以亩产量的中位数不小于 1050kg，故 A 错误；

对于 B，亩产量不低于 1100kg 的频数为 $24+10=34$ ，

所以低于 1100kg 的稻田占比为 $\frac{100-34}{100}=66\%$ ，故 B 错误；

对于 C，稻田亩产量的极差最大为 $1200-900=300$ ，最小为 $1150-950=200$ ，故 C 正确；

对于 D，由频数分布表可得，亩产量在 $[1050,1100)$ 的频数为

$$100-(6+12+18+24+10)=30,$$

所以平均值为

$$\frac{1}{100} \times (6 \times 925 + 12 \times 975 + 18 \times 1025 + 30 \times 1075 + 24 \times 1125 + 10 \times 1175) = 1067, \text{故 D 错}$$

误.

故选 C.

5. 已知曲线 $C: x^2 + y^2 = 16 (y > 0)$ ，从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP' ， P' 为垂足，则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 (y > 0)$ B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1 (y > 0)$
 C. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1 (y > 0)$ D. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{8} = 1 (y > 0)$

解：设 $M(x_0, y_0)$ ，则 $P'(x_0, 0), P(x_0, 2y_0)$ ， P 是曲线 $x^2 + y^2 = 16$ 上，

则 $(x_0)^2 + (2y_0)^2 = 16 (y_0 > 0)$ ，整理得 M 点得轨迹方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 (y > 0)$ ，

故选 A.

6. 设函数 $f(x) = a(x+1)^2 - 1, g(x) = \cos x + 2ax$ ，当 $x \in (-1, 1)$ 时，曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 恰有一个交点，则 $a =$ ()

- A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

解： $f(x) = g(x) \Leftrightarrow ax^2 + 2ax + a - 1 = \cos x + 2ax \Leftrightarrow ax^2 + a - 1 = \cos x$ ；

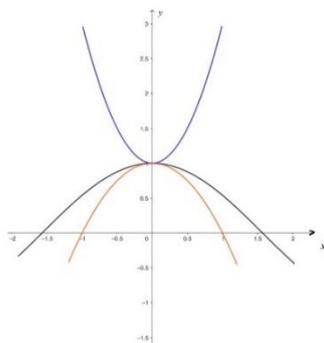
设 $F(x) = ax^2 + a - 1, G(x) = \cos x, x \in (-1, 1)$ ，问题转化为 $F(x), G(x)$ 有唯一交点.

黑色为 $G(x) = \cos x$ ，由于 $F(x), G(x)$ 都为偶函数，对于二次函数 $F(x)$ ，

当 $a \neq 0$ 时， $F(0) = a - 1 = 1$ ，则 $a = 2$ ；

当 $a = 0$ 时， $F(x) = -1$ ，显然无交点；

综上 $a = 2$.



7. 已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{52}{3}$, $AB=6, A_1B_1=2$, 则 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3

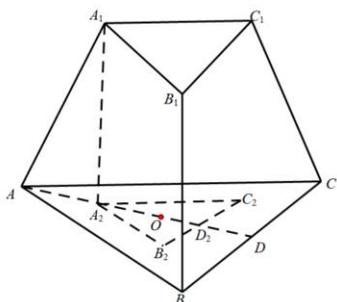
三棱台的体积 $V = \frac{1}{3}h(S_{\text{上}} + S_{\text{下}} + \sqrt{S_{\text{上}}S_{\text{下}}}) = \frac{52}{3}$, 其中 $S_{\text{上}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2$, $S_{\text{下}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2$

解得 $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$AO = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}AB = 2\sqrt{3}$, $A_2O = \frac{2}{3}A_2D_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}A_2B_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $AO - A_2O = AA_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

在直角三角形 $\triangle A_1AA_2$ 中, $h = A_1A_2 = AA_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

故 A_1A 与平面 ABC 所成的角的正切值为 1



故选: B.

8. 设函数 $f(x) = (x+a)\ln(x+b)$, 若 $f(x) \geq 0$, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 ()

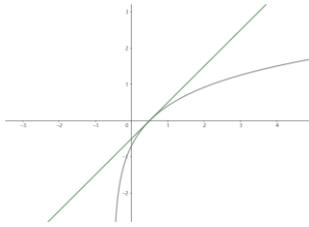
- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

解: $(x+a)\ln(x+b) \geq 0$ 恒成立,

可通过分析两个函数 $(x+a)$ 、 $\ln(x+b)$ 的符号变化入手

两个函数均单调递增, 零点分别为 $x = -a$ 、 $x = 1-b$

当且仅当两个零点重合时, 可满足 $(x+a)\ln(x+b) \geq 0$, 如下图



此时 $-a = 1 - b$

则 $a^2 + b^2 = 2b^2 - 2b + 1$, 当 $b = \frac{1}{2}$ 时取最小值, 为 $\frac{1}{2}$

故选: C.

二、多选题

9. 对于函数 $f(x) = \sin 2x$ 和 $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, 下列正确的有 ()

- A. $f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同零点
- B. $f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同最大值
- C. $f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同的最小正周期
- D. $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象有相同的对称轴

解: $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\right]$

即 $f(x) = \sin 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 可得 $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\right]$ 的图像

$f(x) = \sin 2x$ 的四分之一周期为 $\frac{1}{4}T = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$, 平移量不到四分之一周期

故两个函数的零点、对称轴不相同,

由平移图像关系可知, 两个函数的最大值相同, 函数的最小正周期相同

故选: BC.

10. 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线为 l , P 为 C 上动点, 过 P 作 $\odot A: x^2 + (y - 4)^2 = 1$ 的一条

切线, Q 有切点, 过 P 作 l 的垂线, 垂足为 B , 则 ()

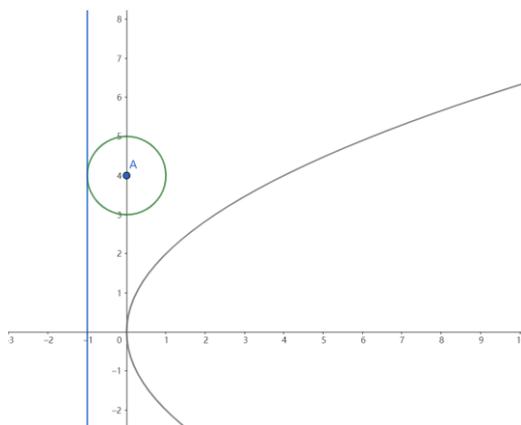
A. l 与 $\odot A$ 相切

B. 当 P, A, B 三点共线时, $|PQ| = \sqrt{15}$

C. 当 $|PB| = 2$ 时, $PA \perp AB$

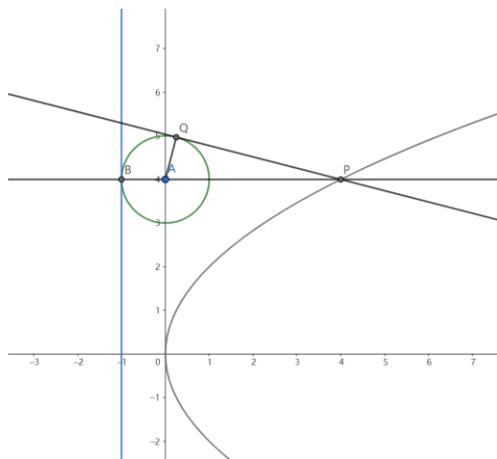
D. 满足 $|PA| = |PB|$ 的点 P 有且仅有 2 个

解:



点 $A(0,4)$ 到准线 $l: x = -1$ 的距离为 1 等于圆 A 的半径, 故选项 A 正确;

当 P, A, B 三点共线时, 如图所示



此时点 $A(0,4)$, 点 $P(4,4)$, $PA = 4$, 切线长 $PQ = \sqrt{PA^2 - 1} = \sqrt{15}$, 故选项 B 正确;

当 $PB = 2$ 时, $x_p = 1$, $y_p = \pm 2$, 点 $P(1,2)$ 或 $P(1,-2)$, 对应的点 B 为 $(-1,2)$ 或 $(-1,-2)$

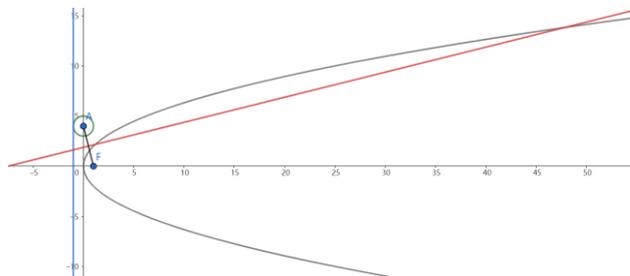
当 $P(1,2)$ 时, $AB = AP = \sqrt{5}$, $PB = 2$, 不满足 $PA \perp AB$, 故选项 C 正确;

设抛物线的焦点为 $F(1,0)$, 由抛物线定义可得 $PB = PF$,

满足 $PA = PB = PF$ 的点 P 需在线段 PF 的垂直平分线上，

PF 的垂直平分线： $y = \frac{1}{4}x + \frac{15}{8}$ ，与抛物线联立可得判别式大于零，

故满足题意的点 P 两个



故选： ABD .

11. 设函数 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$ ，则 ()

A. 当 $a > 1$ 时， $f(x)$ 有三个零点

B. 当 $a < 0$ 时， $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. 存在 a, b ，使得 $x = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称轴

D. 存在 a ，使得点 $(1, f(1))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称中心

解：选项 A：当 $a > 1$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 递增， $(0, a)$ 递减， $(a, +\infty)$ 递增

$f(-\infty) = -\infty$ ， $f(0) = 1$ ， $f(a) = 1 - a^3 < 0$ ， $f(+\infty) = +\infty$ ，此时三次函数有三个零点，选

项 A 正确；

当 $a < 0$ 时， $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，故选项 B 错误；

三次函数 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$ 为中心对称图形，不可能轴对称，故选项 C 错误；

对称中心横坐标为二阶导的零点即 $x = \frac{a}{2}$ ，此时对称中心为 $\left(\frac{a}{2}, f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$

当 $a = 2$ 时，即选项 D 正确；

故选： AD .

三、填空题

12. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_3 + a_4 = 7, 3a_2 + a_5 = 5$, 则 $S_{10} =$ _____.

解: 因为 $\{a_n\}$ 为等差数列,

$$\text{所以 } a_3 + a_4 = 2a_1 + 5d = 7$$

$$3a_2 + a_5 = 4a_1 + 7d = 5$$

$$\text{所以 } a_1 = -4, d = 3$$

$$\text{所以 } S_{10} = 10a_1 + 45d = 95$$

13. 已知 α 为第一象限角, β 为第三象限角, $\tan \alpha + \tan \beta = 4, \tan \alpha \tan \beta = \sqrt{2} + 1$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____

$$\text{解: } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{4}{-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

$$\because 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi < \beta < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\therefore \pi + 4k\pi < \alpha + \beta < 2\pi + 4k\pi$$

$$\text{所以 } \sin(\alpha + \beta) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

14. 在右图的 4×4 方格表中选 4 个方格, 要求每行和每列均恰有一个方格被选中, 则共有 _____ 种选法, 在所有符合上述要求的选法中, 选中方格中的 4 个数之和的最大值是 _____

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

答案: 24;112

解析: (1) 在四列中分别取一格, 分别取第一、二、三、四行中的某一格, 即相当于把取出的格子排序, 故 $A_4^4 = 24$ 种选法.

四、解答题

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$.

(1) 求 A

(2) 若 $a = 2, \sqrt{2}b \sin C = c \sin 2B$, 求 $\triangle ABC$ 周长.

解: (1) $\because \sin A + \sqrt{3} \cos A = 2 \sin \left(A + \frac{\pi}{3} \right) = 2$,

$$\therefore A + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } A = \frac{\pi}{6}$$

$$(2) \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{\sqrt{2}b}{\sin 2B} = 4$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}b}{2 \sin B \cos B} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 即 } \cos B = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{则 } B = \frac{\pi}{4}, C = \frac{7\pi}{12}$$

$$\therefore b = 4 \sin B = 2\sqrt{2}, \quad c = 4 \sin C = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$\therefore C_{\triangle ABC} = 2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$$

16. 已知函数 $f(x) = e^x - ax - a^3$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程

(2) 若 $f(x)$ 有极小值, 且极小值小于 0, 求 a 的取值范围.

解: (1) $f(x) = e^x - x - 1, \quad f'(x) = e^x - 1$

所以 $f(1) = e - 2, \quad k = f'(1) = e - 1$

所以切线方程为 $y - (e - 2) = (e - 1)(x - 1)$,

即 $y = (e - 1)x - 1$

$$(2) f'(x) = e^x - a$$

① 若 $a \leq 0$, 则 $f'(x)$ 恒大于 0, 即 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调增, 无极小值, 舍去

② 在 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增,

则极小值 $f(\ln a) = a - a \ln a - a^3 < 0$

令 $h(x) = 1 - \ln x - x^2$, $h'(x) = -\frac{1}{x} - 2x < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减

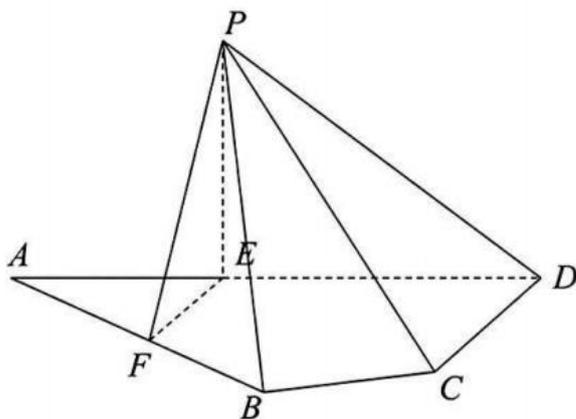
因为 $h(1) = 0$, 所以在 $(0, 1)$ 上 $h(x) > 0$, $(1, +\infty)$ 上 $h(x) < 0$

所以对于方程 $a(1 - \ln a - a^2) < 0$ 的解集为 $(1, +\infty)$

17. 如图, 平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = 8, CD = 3, AD = 5\sqrt{3}, \angle ADC = 90^\circ, \angle BAD = 30^\circ$, 点 E, F 满足 $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 对折至 $\triangle PEF$, 使得 $PC = 4\sqrt{3}$.

(1) 证明: $EF \perp PD$

(2) 求面 PCD 与面 PBF 所成的二面角的正弦值.



解: (1) $AE = \frac{2}{5}AD = 2\sqrt{3}, AF = \frac{1}{2}AB = 4$, 又 $\angle BAD = 30^\circ$,

所以 $EF = 2, EF \perp AD$, 即 $EF \perp PE$,

又 $AD \cap PE = E, AD, PE \subset \text{面 } PED$,

所以 $EF \perp \text{面 } PED$, 又 $PD \subset \text{面 } PED$,

所以 $EF \perp PD$

(2) 因为 $PE = 2\sqrt{3}, PC = 4\sqrt{3}, CE = 6$

所以 $EC \perp PE$, 又 $EF \perp PE, AD \cap EF = E, EF, EC \subset \text{面 } ABCD$,

所以 $PE \perp$ 面 $ABCD$

以 E 为坐标原点, \overline{EF} 为 x 轴正方向, \overline{ED} 为 y 轴正方向, \overline{EP} 为 z 轴正方向建立坐标系

平面 PBF 交坐标轴于 P, F, A 三点, $P(0, 0, 2\sqrt{3})$, $F(2, 0, 0)$, $A(0, -2\sqrt{3}, 0)$

所以平面 PBF 的平面方程为 $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2\sqrt{3}} + \frac{z}{2\sqrt{3}} = 1$

所以平面 PBF 的一个法向量 $n_A = (\sqrt{3}, -1, 1)$

平面 PCD 平行于 x 轴, 与 y 轴的交点为 D , 与 z 轴的交点为 P

所以平面 PCD 的平面方程为 $\frac{y}{3\sqrt{3}} + \frac{z}{2\sqrt{3}} = 1$

所以平面 PCD 的一个法向量 $n_B = (0, 2, 3)$

面 PCD 与面 PBF 所成的二面角的余弦值 $|\cos \theta| = \frac{1}{\sqrt{65}}$

所以面 PCD 与面 PBF 所成的二面角的正弦值为 $\frac{8}{\sqrt{65}} = \frac{8\sqrt{65}}{65}$

18. 某投篮比赛分为两个阶段, 每个参赛队由两名队员组成, 比赛具体规则如下:

第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次, 若 3 次都未投中, 则该队被淘汰, 比赛成绩为 0 分; 若至少投中一次, 则该队进入第二阶段, 由该队的另一名队员投篮 3 次, 每次投中得 5 分, 未投中得 0 分, 该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和。

某参赛队由甲、乙两名队员组成, 设甲每次投中的概率为 p , 乙每次投中的概率为 q , 各次投中与否相互独立。

(1) 若 $p = 0.4, q = 0.5$, 甲参加第一阶段比赛, 求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 的概率

(2) 假设 $0 < p < q$,

(i) 为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大, 应该由谁参加第一阶

段的比赛

(ii) 为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大，应该由谁参加第一阶段比赛

解：(1) 不妨记第一阶段通过的概率为 P_1 ，记第二阶段得到不少于 5 分的概率为 P_2

$$\text{则 } P_1 = 1 - 0.6^3; \quad P_2 = 1 - 0.5^3$$

即甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 的概率为

$$P_1 \cdot P_2 = (1 - 0.6^3)(1 - 0.5^3) = 0.686$$

(2) (i) ①若甲参加第一阶段的比赛，则队伍进入第二阶段的概率为： $1 - (1 - p)^3$

第二阶段拿到 15 分的概率为 q^3 ；队伍的比赛成绩记为 P_3 ，则 $P_3 = [1 - (1 - p)^3] q^3$

②若乙参加第一阶段的比赛，则队伍进入第二阶段的概率为： $1 - (1 - q)^3$

第二阶段拿到 15 分的概率为 p^3 ；队伍的比赛成绩记为 P_4 ，则 $P_4 = [1 - (1 - q)^3] p^3$

$$\begin{aligned} P_3 - P_4 &= [1 - (1 - p)^3] q^3 - [1 - (1 - q)^3] p^3 \\ &= (p^3 q^3 - 3p^2 q^3 + 3pq^3) - (p^3 q^3 - 3q^2 p^3 + 3qp^3) \\ &= 3p^2 q^2 (p - q) + 3pq(q^2 - p^2) \\ &= 3pq(p - q)(pq - p - q) \end{aligned}$$

因为 $0 < p < q < 1$ ，则 $p - q < 0$ ， $pq - p - q < 0$ ，

则 $P_3 - P_4 > 0$ ，即当甲参加第一阶段比赛时，甲乙这支队伍比赛成绩为 15 分的概率最大

(2) (ii) 首先考虑甲先参加比赛的情况，则进入第二阶段的概率为 $1 - (1 - p)^3$ ；

第二阶段中，设乙投中的次数为 X ，得分为 Y ，则 $Y = 5X$ ，且 $X \sim B(3, q)$ ，则

$E(X) = 3q$ ， $E(Y) = 3E(X) = 15q$ ；则甲先参加比赛的得分期望为

$$[1 - (1 - p)^3]E(Y) = 15[1 - (1 - p)^3]q；$$

同理可得乙先参加比赛的得分期望为 $[1 - (1 - q)^3]E(Y) = 15[1 - (1 - q)^3]p$ ；

$$15[1 - (1 - p)^3]q - 15[1 - (1 - q)^3]p = 15pq[(p^2 - 3p + 3) - (q^2 - 3q + 3)] = 15pq[(p + q)(p - q) - 3(p - q)]$$

$$= 15pq[(p + q)(p - q) - 3(p - q)] = 15pq(p - q)(p + q - 3)$$

由于 $p - q < 0$, $p + q - 3 < 0$

所以， $15[1 - (1 - p)^3]q > 15[1 - (1 - q)^3]p$ ，即甲先参加比赛的得分期望更高。

19. 已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = m (m > 0)$ ，点 $P_1(5, 4)$ 在 C 上， k 为常数， $0 < k < 1$ ，按

照如下方式依次构造点 $P_n (n = 2, 3, \dots)$ ，过 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于

点 a_{n-1} ，令 P_n 为 a_{n-1} 关于 y 轴的对称点，记 P_n 的坐标为 (x_n, y_n)

(1) 若 $k = \frac{1}{2}$ ，求 x_2, y_2

(2) 证明：数列 $\{x_n - y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列

(3) 设 S_n 为 $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 的面积，证明：对任意的正整数 n , $S_n = S_{n+1}$.

解：(1) 将点 $P_1(5, 4)$ 代入双曲线方程，得 $m = 9$. 则双曲线方程为 $x^2 - y^2 = 9$.

可得双曲线左顶点坐标为 $(-3, 0)$. 注意到过 $(5, 4)$ 与 $(-3, 0)$ 的直线斜率为 $\frac{4-0}{5-(-3)} =$

$\frac{1}{2}$ ，可知 $(-3, 0)$ 就是 a_1 点，故 $P_2(3, 0)$.

所以 $x_2 = 3, y_2 = 0$

(2) 由 $k = \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n + x_{n+1}}$ ，得 $1 + k = \frac{x_n + x_{n+1} + y_n - y_{n+1}}{x_n + x_{n+1}}$ ， $1 - k = \frac{x_n + x_{n+1} - y_n + y_{n+1}}{x_n + x_{n+1}}$

$$\text{故 } \frac{1+k}{1-k} = \frac{x_n + x_{n+1} + y_n - y_{n+1}}{x_n + x_{n+1} - y_n + y_{n+1}}$$

两边同时乘以 $\frac{x_n - y_n}{x_{n+1} - y_{n+1}}$

$$\begin{aligned} \text{得} \frac{1+k}{1-k} \cdot \frac{x_n - y_n}{x_{n+1} - y_{n+1}} &= \frac{x_n + x_{n+1} + y_n - y_{n+1}}{x_n + x_{n+1} - y_n + y_{n+1}} \cdot \frac{x_n - y_n}{x_{n+1} - y_{n+1}} = \\ \frac{(x_n + y_n)(x_n - y_n) + (x_{n+1} - y_{n+1})(x_n - y_n)}{(x_n - y_n)(x_{n+1} - y_{n+1}) + (x_{n+1} - y_{n+1})(x_{n+1} - y_{n+1})} &= \frac{9 + (x_{n+1} - y_{n+1})(x_n - y_n)}{(x_n - y_n)(x_{n+1} - y_{n+1}) + 9} = 1. \end{aligned}$$

其中倒数第二个等号应用了 $(x_n + y_n)(x_n - y_n) = (x_n - y_n)(x_{n+1} - y_{n+1}) = 9$,

这是来自 P_n 和 P_{n+1} 都在双曲线上这个条件.

因此 $\frac{x_{n+1} - y_{n+1}}{x_n - y_n} = \frac{1+k}{1-k}$, 即 $\{x_n - y_n\}$ 是以 $\frac{1+k}{1-k}$ 为公比的等比数列.

$$(3) \text{ 记 } S = S_{\Delta P_n P_{n+1} P_{n+2}} = \frac{1}{2} |(x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_{n+2}) - (x_{n+1} - x_{n+2})(y_{n+1} - y_n)|$$

考虑到 $k = \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n + x_{n+1}} = \frac{y_{n+1} - y_{n+2}}{x_{n+1} + x_{n+2}}$, 故 $y_{n+1} - y_{n+2} = k(x_{n+1} + x_{n+2})$, $y_n - y_{n+1} =$

$k(x_n + x_{n+1})$, 代入 S 的表达式

$$\begin{aligned} S &= \frac{k}{2} |(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_{n+2}) + (x_{n+1} - x_{n+2})(x_n + x_{n+1})| \\ &= k |x_{n+1}^2 - x_n x_{n+2}| \end{aligned}$$

记 $\frac{1+k}{1-k} = t$

由第二问结论可得 $x_n - y_n = (x_1 - y_1) \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{n-1} = \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{n-1} = t^{n-1}$, 而 $x_n +$

$$y_n = \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n - y_n} = \frac{9}{t^{n-1}}$$

两式相加可得 $2x_n = t^{n-1} + \frac{9}{t^{n-1}}$, 即 $x_n = \frac{1}{2} \left(t^{n-1} + \frac{9}{t^{n-1}}\right)$.

代入 S 的表达式 $S = k \left| \frac{1}{4} \left(t^n + \frac{9}{t^n}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(t^{n-1} + \frac{9}{t^{n-1}}\right) \cdot \frac{1}{2} \left(t^{n+1} + \frac{9}{t^{n+1}}\right) \right| =$

$$\frac{k}{4} \left| \left(t^{2n} + \frac{9}{t^{2n}} + 18\right) - \left(t^{2n} + \frac{9}{t^{2n}} + 9t^2 + \frac{9}{t^2}\right) \right| = \frac{k}{4} \left| 18 - \left(9t^2 + \frac{9}{t^2}\right) \right|.$$

可见 S 是只与 k 有关的表达式, 与 n 无关, 所以 S 是定值.