注意事项：

1．答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上.

2．答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号.

3．答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上.

4．所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效.

5．考试结束后，只将答题卡交回.

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．在复平面内，$(1+3\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$ 对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【答案】A

【解析】$(1+3\mathrm{i})(3-\mathrm{i})=6+8\mathrm{i}$，故对应的点在第一象限,选 A.

2．设集合 $A=\{0,-a\}$，$B=\{1,a-2,2a-2\}$，若 $A\subseteq B$，则 $a=$

A．2　　B．1　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．－1

【答案】B

【解析】若 $a-2=0$，则 $a=2$，此时 $A=\{0,-2\}$，$B=\{1,0,2\}$，不满足题意；若 $2a-2=0$，则 $a=1$，此时 $A=\{0,-1\}$，$B=\{1,-1,0\}$，满足题意. 故选 B.

3．某学校为了解学生参加体育运动的情况，用比例分配的分层随机抽样法作抽样调查，拟从初中部和高中部两层共抽取 60 名学生，已知该校初中部和高中部分别有 400 和 200 名学生，则不同的抽样结果共有

A．$C_{400}^{45}\cdot C_{200}^{15}$　　B．$C_{400}^{20}\cdot C_{200}^{40}$　　C．$C_{400}^{30}\cdot C_{200}^{30}$　　D．$C_{400}^{40}\cdot C_{200}^{20}$

【答案】D

【解析】根据按比例分配的分层抽样可知初中部抽 40 人，高中部抽 20 人，故选 D.

4．若 $f(x)=(x+a)\ln\dfrac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数，则 $a=$

A．－1　　B．0　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．1

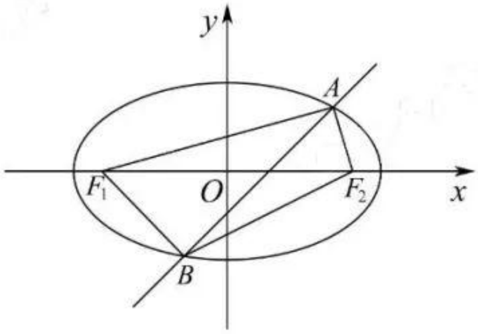
【答案】B

【解析】发现 $g(x)=\ln\dfrac{2x-1}{2x+1}$ 是奇函数，而 $f(x)=(x+a)g(x)$ 为偶函数，有 $f(-x)=(-x+a)g(-x)=-(-x+a)g(x)=(x+a)g(x)=f(x)$，故 $x-a=x+a$，则 $a=0$，选 B.

5．已知椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，直线 $y=x+m$ 与 C 交于 A、B 两点，若 $\triangle F_1AB$ 的面积是 $\triangle F_2AB$ 的面积的 2 倍，则 $m=$

A．$\dfrac{2}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$-\dfrac{2}{3}$

【答案】C



【解析】由依题意可知 $s_{\triangle F_1AB}=2s_{\triangle F_2AB}$，设椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2 到直线 $y=x+m$ 的距离分别为 d_1、d_2，且 $-2<m<0$，所以有 $\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d_1=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d_2$，即 $d_1=2d_2$，将 $d_1=\dfrac{|-\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}$，$d_2=\dfrac{|\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}$ 代入上式解得 $m=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，故选 C

6. 已知函数 $f\left(x\right)=ae^x-\ln x$ 在区间 $\left(1,2\right)$ 上单调递增，则 a 的最小值为

A．e^2　　B．e　　C．e^{-1}　　D．e^{-2}

【答案】C

【解析】由题意可知 $f'(x)=ae^x-\dfrac{1}{x}\geqslant 0$ 在区间 $\left(1,2\right)$ 上恒成立，即 $a\geqslant\left(\dfrac{1}{xe^x}\right)_{\max}$，设 $g(x)=xe^x$，则在 $x\in(1,2)$ 上恒有 $g'(x)=(x+1)e^x>0$，所以 $g(x)_{\min}=g(1)=e$，则 $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)_{\max}=\dfrac{1}{e}$，即 $a\geqslant e^{-1}$，故选 C.

7. 已知 α 为锐角，$\cos\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$，则 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=$

A．$\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}$　　B．$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{8}$　　C．$\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$　　D．$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

【答案】D

【解析】由半角公式 $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ 解得，$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，故选 D.

8. 记 S_n 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_4=-5, S_6=21S_2$，$S_8=$

A．120　　B．85　　C．−85　　D．−120

【答案】C

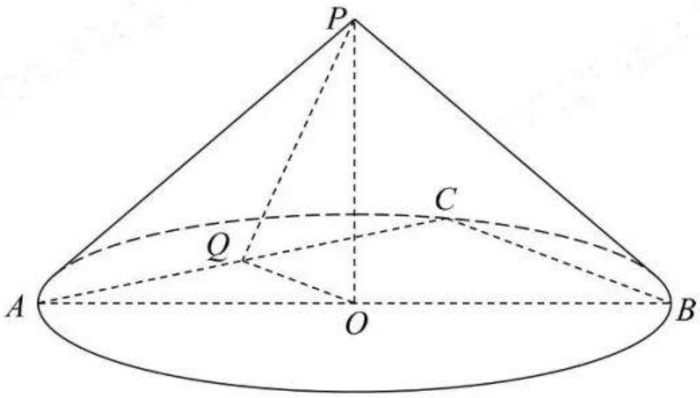
【解析】由等比数列的性质可得 S_2, S_4-S_2, S_6-S_4 成等比数列，因此 $\left(S_4-S_2\right)^2=S_2\left(S_6-S_4\right)$，将 $S_4=-5, S_6=21S_2$ 代入上式解得 $S_2=-1$（舍）或 $\frac{5}{4}$，此时 $S_6=\frac{105}{4}$，由等比数列性质可知 $S_4-S_2, S_6-S_4, S_8-S_6$ 为等比数列，解得 $S_8=-85$，故选 C.

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．已知圆锥的顶点为 P 底面圆心为 O, AB 为底面的直径，$\angle APB=120^{\circ}$，$AP=2$，点 C 在底面圆周上，且二面角 $P-AC-O=45^{\circ}$，则

A．该圆锥的体积为 π　　B．该圆锥的侧面积为 $4\sqrt{3}\pi$

C．$AC=2\sqrt{2}$　　D．ΔPAC 的面积为 $\sqrt{3}$



【答案】AC

【解析】由 $\angle APB=120^{\circ}$，$AP=2$ 可知，底面直径 $AB=2\sqrt{3}$，高 $PO=1$，故该圆锥的体积为 π，所以 A 对；该圆锥的侧面积为 $2\sqrt{3}\pi$，所以 B 错. 连接 CB，取 AC 中点为 Q，连接 QO，PQ，易证二面角 $P-AC-O=45^{\circ}$ 的平面角为 $\angle PQO=45^{\circ}$，所以 $QO=PO=1$，$PQ=\sqrt{2}$，所以 $BC=2$，所以 $AC=2\sqrt{2}$，故 C 对；

$S_{\Delta PAC}=\frac{1}{2}AC\bullet PQ=2$，故 D 错.

10．设 O 为坐标原点，直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 过抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点，且与 C 交于 M、N 两点，l 为 C 的准线，则

A． $p=2$

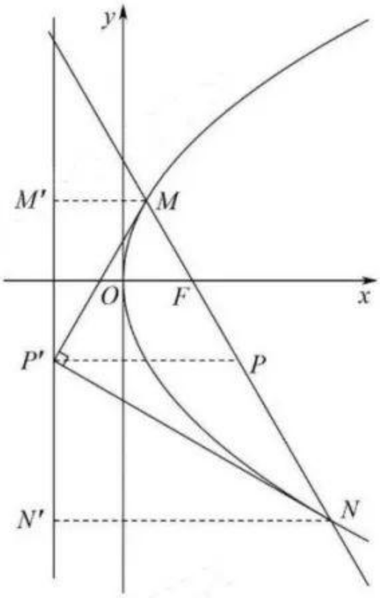
B． $|MN|=\dfrac{8}{3}$

C．以 MN 为直径的圆与 l 相切

D． ΔOMN 为等腰三角形

【答案】AC

【解析】直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 与 x 轴的交点为 $(1,0)$ 可知，抛物线的焦点的坐标为 $(1,0)$，所以 $p=2$，故 A 选项正确；由 $k_{MN}=-\sqrt{3}$ 可知直线 MN 的倾斜角为 120°，所以 $|MN|=\dfrac{2p}{\sin^2 120^\circ}=\dfrac{16}{3}$，故 B 选项错误. 过点 M 作准线 l 的垂线，交 l 于点 M'，过点 N 作准线 l 的垂线，交 l 于点 N'；并取 MN 的中点为点 P，过点 P 作准线 l 的垂线，交 l 于点 P'，连接 MP'、NP'，由抛物线的定义知 $MF=MM'$，$NF=NN'$，所以 $|MN|=|MM'|+|NN'|$，所以由梯形的中位线可知 $PP'=\dfrac{1}{2}(|MM'|+|NN'|)=\dfrac{1}{2}|MN|$，所以 $PP'=MP=PN$，所以以 MN 为直径的圆与 l 相切，故 C 对，由图观察可知，ΔOMN 显然不是等腰三角形，故 D 错.



11．若函数 $f\ x\ =a\ln x+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}(a\neq 0)$ 既有极大值又有极小值则：

A． $bc>0$　　B． $ab>0$　　C． $b^2+8ac>0$　　D． $ac<0$

【答案】BCD

【解析】由题可知 $f\ x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'\ x\ =\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x^2}-\dfrac{2c}{x^3}=\dfrac{ax^2-bx-2c}{2x^3}$,由函数 $f\ x$ 既有极大值又有极小值，则 $f'\ x$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不等实根，令 $h(x)=ax^2-bx-2c$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不等实根，所以 $\begin{cases}\Delta>0\\ x_1+x_2>0\\ x_1\bullet x_2>0\end{cases}$，即

$$\begin{cases} b^2+8ac>0 \\ \dfrac{b}{a}>0 \\ \dfrac{-2c}{a}>0 \end{cases}$$，所以$\begin{cases} b^2+8ac>0 \\ ab>0 \\ ac<0 \end{cases}$，所以$b$与$a$同号，$c$与$a$异号，故$bc<0$，所以 A 错误，B 正确，C 正确，D 正确.

12．在信道内传输 0，1 信号， 信号的传输相互独立，发送 0 时，收到 1 的概率为 $\alpha(0<\alpha<1)$,收到 0 的概率为$1-\alpha$;发送 1 时，收到 0 的概率为$\beta(0<\beta<1)$ 收到 1 的概率为$1-\beta$. 考虑两种传输方案:单次传输和三次传输. 单次传输是指每个信号只发送 1 次;三次传输是指每个信号重复发送 3 次. 收到的信号需要译码，译码规则如下:单次传输时，收到的信号即为译码:三次传输时，收到的信号中出现次数多的即为译码(例如，若依次收到 1，0，1, 则译码为 1).

A. 采用单次传输方案，若依次发送 1，0， 1,则依次收到 1，0, 1 的概率为$(1-\alpha)(1-\beta)^2$

B. 采用三次传输方案，若发送 1,则依次收到 1， 0， 1 的概率为$\beta(1-\beta)^2$

C. 采用三次传输方案，若发送 1，则译码为 1 的概率为$\beta(1-\beta)^2+(1-\beta)^3$

D. 当 0<a<0. 5 时，若发送 0，则采用三次传输方案译码为 0 的概率大于采用单次传输方案译码为 0 的概率

【答案】ABD

【解析】

AB 选项由相互独立的积事件的概率乘法公式可知为对；C 选项三次传输译码为 1，则可能是三次全部译为 1，或者有两次译为 1，则概率为$C_3^2\beta(1-\beta)^2+(1-\beta)^3$,故 C 选项错误，针对 D 选项：可以采用特值法或者作差发计算. 三次传输方式译为 0 的概率：

$C_3^2\alpha(1-\alpha)^2+(1-\alpha)^3$，单次传输译为 0 的概率为：$1-\alpha$，而

$C_3^2\alpha(1-\alpha)^2+(1-\alpha)^3-(1-\alpha)=(1-\alpha)\alpha(1-2\alpha)>0$，所以 D 对.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则$|\boldsymbol{b}|=$ ________.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】由$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，得$\boldsymbol{a}^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；由$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，得$\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=3$，即$\boldsymbol{b}^2=3$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$.

14．底面边长为 4 的正四棱锥被平行于其底面的平面所截，截去一个底面边长为 2，高为 3 的正四棱锥，所得棱台的体积为______.

【答案】28

【解析】**方法一** 由棱台性质可知，上下两个底面相似比为 1：2，故截后棱台的体高为 3，上底面为边长为 2 的正方形，下底面为边长为 4 的正方形，代入棱台体积公式得：

$V=\frac{1}{3}\times 3\times(2^2+4^2+\sqrt{2^2\times 4^2})=28$.

方法二 由题意易求正四棱锥高为6，

$V_{棱台}=V_{大四棱锥}-V_{小四棱锥}=\frac{1}{3}\times 4\times 4\times 6-\frac{1}{3}\times 2\times 2\times 3=28$.

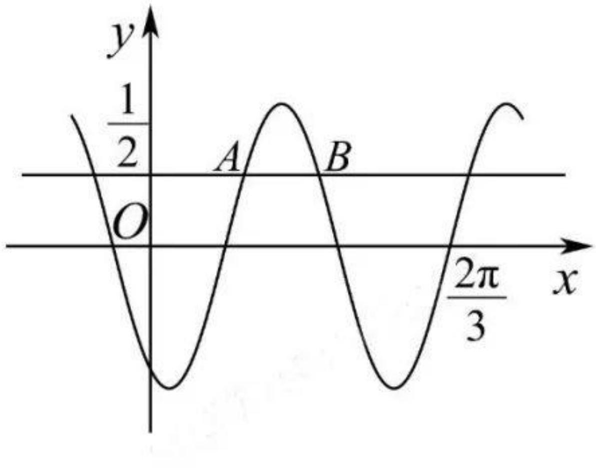
15．已知直线$x-my+1=0$与$\odot C:(x-1)^2+y^2=4$交于A，B两点，写出满足"$\triangle ABC$面积为$\frac{8}{5}$"的m的一个值为______.

【答案】± 2或$\pm\frac{1}{2}$（任写一个）

【解析】方法一 由题可知ΔABC为腰长为 8 的等腰三角形，设其顶角为θ，$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin\theta$，解得$\sin\theta=\frac{4}{5}$，解$\triangle ABC$可得：$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$，圆心$C$到直线$x-my+1=0$的距离为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$，代入点线距公式可得：$m=\pm\frac{1}{2}$（任填一个值即可）.

方法二 由$x-my+1=0$恒过定点$(-1,0)$，又$C(1,0)$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times|y_B|=\frac{8}{5}$，所以$|y_B|=\frac{8}{5}$，代入圆的方程得$x_B=\frac{11}{5}$或$x_B=-\frac{1}{5}$，所以$B(\frac{11}{5},\frac{8}{5})$或$B(\frac{11}{5},-\frac{8}{5})$或$B(-\frac{1}{5},\frac{8}{5})$或$B(-\frac{1}{5},-\frac{8}{5})$代入直线方程得$m=\pm 2$或$m=\pm\frac{1}{2}$.

16．已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，如图$A,B$是直线$y=\frac{1}{2}$与曲线$y=f(x)$的两个交点，若$|AB|=\frac{\pi}{6}$，则$f(\pi)=$__________.



【答案】$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】设 $A(x_1,\frac{1}{2})$，$B(x_2,\frac{1}{2})$，则 $\omega x_1+\varphi=\frac{\pi}{6}$，$\omega x_2+\varphi=\frac{5\pi}{6}$，又 $x_2-x_1=\frac{\pi}{6}$，所以 $\omega=4$，

由曲线 $y=f(x)$ 过 $(\frac{2\pi}{3},0)$，所以 $4\times\frac{2\pi}{3}+\varphi=2\pi$，即 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin(4x-\frac{2\pi}{3})$，

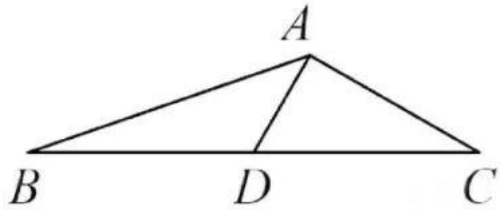
$f(\pi)=\sin(4\pi-\frac{2\pi}{3})=\sin(-\frac{2\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（12 分）记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知三角形△ABC 的面积为 $\sqrt{3}$，点 D 为 BC 的中点，且 AD=1．

（1）若 $\angle \mathrm{ADC}=\frac{\pi}{3}$，求 $\tan B$；

（2）若 $b^2+c^2=8$，求 b 和 c．



【答案】（1）$\tan B=\frac{\sqrt{3}}{5}$；（2 $b=c=2$．

【解析】（1）方法一:正弦定理+余弦定理

由题意可知 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=2\sqrt{3}$，故 $ac\sin B=2\sqrt{3}$ ……①，

又在△ABD 中，有 $\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，由 $\angle ADC=\frac{\pi}{3}$ 得，

$\frac{1}{\sin B}=\frac{c}{\sin\frac{2\pi}{3}}$，故 $c\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……②；代入①式得 $a=4$．

在△ADB 中，由余弦定理得 $AB^2=c^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cos\frac{2\pi}{3}$，

有 $c^2=1^2+2^2-2\times1\times2\cos\frac{2\pi}{3}=5+2=7$，得 $c=\sqrt{7}$．

在△ABD 中，$\cos B=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\frac{7+4-1}{2\sqrt{7}\times2}=\frac{5}{2\sqrt{7}}>0$，

故 $B\in(0,\frac{\pi}{2})$，有 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$，$\tan B=\frac{\sqrt{3}}{5}$．

方法二:余弦定理

因 AD 为△ABC 的中线，故 $S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta ADC}=2\times\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times1\times\sin60^0=\frac{\sqrt{3}}{4}a=\sqrt{3}$，

故 $a=4$，在 ΔADC 中，由余弦定理知 $b^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos60^0=3$，

进一步在 ΔABD 中，$c^2=AB^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos120^0=7$，

在 ΔABC 中有，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{7+16-3}{2\sqrt{7}\times4}=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}>0$，

故 $B\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，有 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$， $\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$．

（2）在△ABC，由中线长公式可得 $b^2+c^2=2(AD^2+BD^2)$，

得 $AD^2+BD^2=4$，知 $BD=\sqrt{3}$,得 $a=2\sqrt{3}$．

由 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ 和 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$ 得， $S=\dfrac{1}{4}(b^2+c^2-a^2)\tan A$，

代入有 $\tan A=-\sqrt{3}<0$，得 $A\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，有 $A=\dfrac{2\pi}{3}$．

又 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，有 $bc=4$．

由 $b^2+c^2=8$ 和 $bc=4$，得 $b=c=2$．

方法三

（1）因为 $S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta ADC}=2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{2}\times1\times\sin60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a=\sqrt{3}$

所以：$a=4$，在 ΔADC 中由余弦定理得：$b^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos60^0=3$

在 ΔABD 中 $c^2=AB^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos120^0=7$

在 ΔABC 中

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{7+16-3}{2\sqrt{7}\times4}=\frac{5}{2\sqrt{7}},\qquad \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

因此：$\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

（2）在 ΔABC 中 由中线长公式得：$(2AD)^2+BC^2=2(AB^2+AC^2)$,即

$2^2+a^2=2(b^2+c^2)=16$，因而 $a^2=12$

又 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$,因而 $bc\sin A=2\sqrt{3}$

又由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即 $12=8-2bc\cos A$，因而 $bc\cos A=-2$

因而有 $\tan A=-\sqrt{3}\Rightarrow\cos A=-\dfrac{1}{2}$,所以 $bc=4$，又 $b^2+c^2+2bc=8+8=16=(b+c)^2$

$b^2+c^2-2bc=8-8=0=(b-c)^2$ 故可得 $b=c=2$

18.（12分）$\{a_n\}$ 为等差数列，$b_n=\begin{cases}a_n-6(n奇),\\2a_n(n偶),\end{cases}$ 记 S_n，T_n 为 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和,

$S_4=32$，$T_3=16$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）证明：当$n>5$时，$T_n>S_n$.

【答案】（1）$a_n=2n+3$；（2）见解析.

【解析】（1）设$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，

由$S_4=32$得$4a_1+6d=32$

又$b_1=a_1-6$，$b_2=2a_2=2a_1+2d$，$b_3=a_3-6=a_1+3d-6$

所以$T_3=4a_1+4d-12=16$，即$a_1+d=7$

由$\begin{cases}4a_1+6d=32,\\a_1+d=7\end{cases}$得$\begin{cases}a_1=5,\\d=2\end{cases}$所以$a_n=2n+3$.

（2）由（1）知$b_n=\begin{cases}2n-3,n\text{为奇数},\\4n+6,n\text{为偶数}.\end{cases}$

当$n=2k$（$k\in\mathbf{N}^*$）时，$T_n=k(-1)+\dfrac{k(k-1)}{2}\times4+14k+\dfrac{k(k-1)}{2}\times8=5k^2+7k$

$S_n=2k\times5+\dfrac{2k(2k-1)}{2}\times2=4k^2+8$

$T_n-S_n=k^2-k=k(k-1)$

当$n>5$即$k>2$时，$k(k-1)>0$，所以$T_n>S_n$；

当$n=2k-1$（$k\in\mathbf{N}^*$）时，$T_n=(k+1)(-1)+\dfrac{(k+1)k}{2}\times4+14k+\dfrac{k(k-1)}{2}\times8$

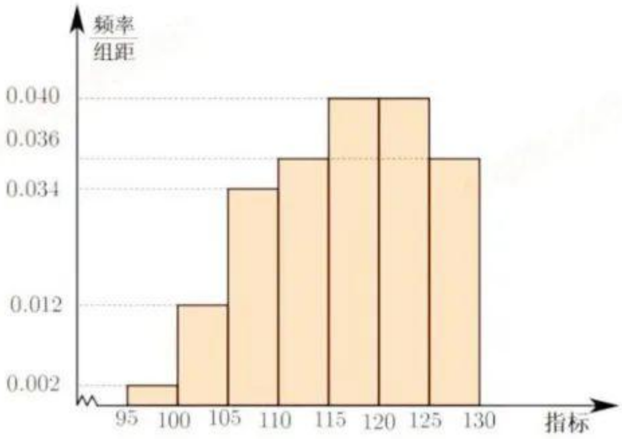
$=6k^2+11k-1$

$S_n=(2k+1)\times5+\dfrac{(2k+1)2k}{2}\times2=4k^2+12k+5$

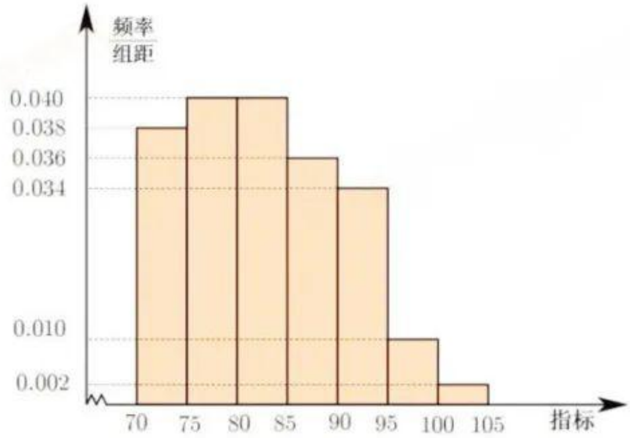
$T_n-S_n=2k^2-k-6=(2k+3)(k-2)$

当$n>5$即$k>2$时，$(2k+3)(k-2)>0$，所以$T_n>S_n$.证毕.

19.（12分）某研究小组经过研究发现某种疾病的患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异，经过大量调查，得到如下的患病者和未患病者该指标的频率分布直方图：



患病者



未患病者

利用该指标制定一个检测标准，需要确定临界值c,将该指标大于c的人判定为阳性,小于或等于c 的人判定为阴性, 此检测标准的漏诊率是将患病者判为阴性的概率,记为$p(c)$;误诊率是将未患病者判定为阳性的概率,记为$q(c)$.假设数据在组内平均分布，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率.

(1)当$p(c)=0.5\%$时，求临界值 c 和误诊率$q(c)$；

(2)设函数$f(c)=p(c)+q(c)$，当$c\in[95,105]$时，求$f(c)$的解析式，并求$f(c)$在区间$[95,105]$的最小值.

【答案】(1) $c=97.5$,$q(c)=3.5\%$;

(2) 0.012

【解析】

(1)由题意当$p(c)=0.5\%$时，$c=97.5$,此时$q(c)=\dfrac{0.01\times5}{2}+0.002\times5=0.035=3.5\%$

(2) 当$c\in[95,100)$，$p(c)=\dfrac{c-95}{5}\times0.002,q(c)=\dfrac{100-c}{5}\times0.01+0.01$

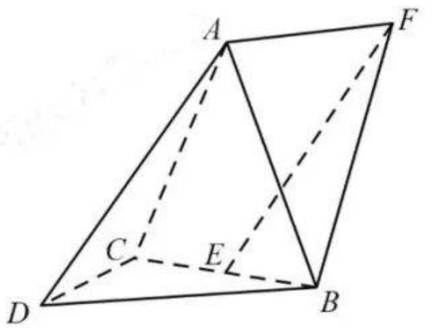
当$c\in[100,105)$，$p(c)=5\times0.002+\dfrac{c-100}{5}\times0.012,q(c)=\dfrac{105-c}{5}\times0.002$

$$\therefore f(c)=\begin{cases}-0.0016c+0.172,c\in[95,100)\\0.002c-0.188,c\in[100,105]\end{cases}$$

所以,当$c=100$时$f(c)$取最小值，最小值为$f(100)=0.012$.

20.（12 分）在三棱锥$A-BCD$中，$DA=DB=DC$，$BD\perp CD$，$\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$，已知$E$为$BC$的中点.

（1）证明：$BC\perp DA$；（2）点F满足$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，求二面角$D-AB-F$的正弦值.



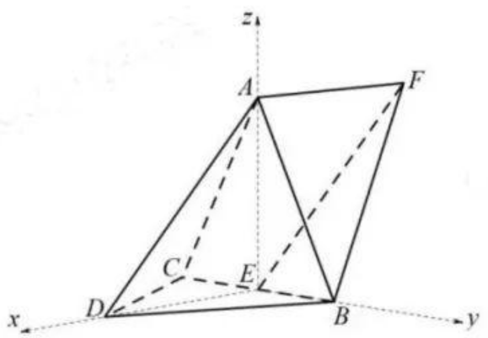
【答案】(1) 略; (2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】方法一

(1) 证明：连接 AE、DE，设 $DA=DB=DC=\sqrt{2}$，$\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$，所以 $\triangle ADB\cong\triangle ADC$，

因此 $AB=AC=\sqrt{2}$，又因为 $BE=CE$， 所以 $AE\perp BC$，同理 $DE\perp BC$，又 $AE\cap DE=E$，

所以 $BC\perp$ 平面 ADE，又 $AD\subset$ 平面 ADE，所以 $BC\perp AD$.



(2) 解：由 $DA=DB=DC=\sqrt{2}$，$\angle BDC=90^\circ$，

由 (1) $DE\perp BC$，$AB=AC=\sqrt{2}$，则 $DE=BE=CE=AE=1$，可得

$AE^2+DE^2=AD^2$，因此 $AE\perp DE$，由 (1) $AE\perp BC$，又 $DE\cap BC=E$，所以 $AE\perp$ 平面 BDC.

因此以 E 为原点，分别以 ED、EB、EA 为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，

则 $D(1,0,0)$，$A(0,0,1)$，$E(0,0,0)$，$B(0,1,0)$，

因为 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AE}=(0,0,-1)$， 所以 $\overrightarrow{DB}=(-1,1,0)$，

$\overrightarrow{AB}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{AF}=(-1,0,0)$，

设平面 ABD，平面 ABF 的法向量分别是 $\vec{m}=(x,y,z)$，$\vec{n}=(a,b,c)$，

所以$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DB}=-x+y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=y-z=0\end{cases}$ 取$x=1$，则$\vec{m}=(1,1,1)$，同理$\vec{n}=(0,1,1)$，

设平面ABD与平面ABF的夹角为θ，则$\cos\theta=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即二面角$D-AB-F$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

方法二 (1)证明：连接AE、DE，

$\because DB=DC$, E为BC的中点

$\therefore DE\perp BC$

$\because DB=DC$, $\angle ADB=\angle ADC=60^{0}$, DA为公共边

$\therefore\triangle ADB\cong\triangle ADC$

$\therefore AB=AC$, $\therefore AE\perp BC$, 又$AE\cap DE=E$, $AE,DE\subset$平面ADE, 所以$BC\perp$平面ADE，

故$BC\perp AD$.

（2）不妨设$DA=DB=DC=2$，得$AB=AC=2$, $BC=2\sqrt{2}$, $DE=\sqrt{2}$，在直角$Rt\triangle AEB$中，得$AE=\sqrt{2}$，所以$AE^2+DE^2=AD^2$，即$AE\perp DE$. 又$AE\perp BC$，$DE\cap BC=E$，$BC,DE\subset$平面BCD, 所以$AE\perp$平面BCD.

如图以E为原点，分别以ED、EB、EA为x、y、z轴建立空间直角坐标系，

则$E(0,0,0)$，$A(0,0,\sqrt{2})$，$D(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，又

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，得$F(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，

又$\overrightarrow{AB}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $\overrightarrow{DB}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$, $\overrightarrow{BF}=(-\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2})$

设平面DAB的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{2}y-\sqrt{2}z=0\end{cases}$，令$x=1$，得$\vec{n}=(1,1,1)$，

同理可得平面ABF的一个法向量$\vec{m}=(0,1,1)$，

设平面DAB与平面ABF的夹角为θ，则$|\cos\theta|=|\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}|=\dfrac{1+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故二面角$D-AB-F$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

21．（12分）双曲线C中心为坐标原点，左焦点$F_1(-2\sqrt{5},0)$,离心率为$\sqrt{5}$

(1)求C的方程

(2)记C得左、右顶点分别为A_1,A_2,过点$B(-4,0)$的直线与C的左支交于M,N两点，M在第二象限，直线MA_1与NA_2交于P，证明：P在定直线上.

方法一：

【解析】(1)由题意 $c=2\sqrt{5}$, $e=\sqrt{5}=\dfrac{c}{a}$，则 $a=2$，$b^2=16$,

双曲线为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

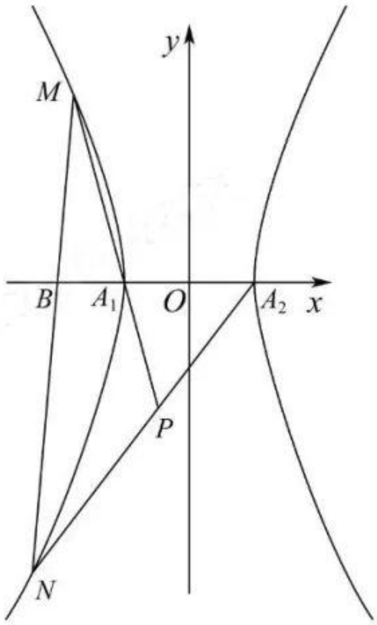
(2)设过点 B 的直线 $x=ty-4$，联立双曲线得 $(4t^2-1)\ y^2-32ty+48=0$

则 $y_1+y_2=\dfrac{32t}{4t^2-1}, y_1\cdot y_2=\dfrac{48}{4t^2-1}$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-8}{4t^2-1}$,

设直线 MA_1：$\dfrac{y-y_1}{y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_1+2}$ 设直线 NA_2：$\dfrac{y-y_2}{y_2}=\dfrac{x-x_2}{x_2-2}$,

联立得消去 y 得 $(\dfrac{x-x_1}{x_1+2}+1)y_1=(\dfrac{x-x_2}{x_2-2}+1)y_2$,

代入韦达定理的 $x=-1$，即 P 在直线 $x=-1$ 上



方法二：

(1) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$,

(2) ①当 $l\perp y$ 轴时，不符合题意.

②设直线 $l: x=ty-4$，$M(x_1,y_1), N(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$.

联立方程组即 $\begin{cases} x=ty-4 \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1 \end{cases}$ 则 $(4t^2-1)y^2-32ty+48=0$,

$\because$ 直线与双曲线的左支有两个交点，即 $\begin{cases} 4t^2-1\neq 0 \\ \Delta>0 \\ y_1y_2<0 \end{cases}$ ，则

$y_1+y_2=\dfrac{32t}{4t^2-1},y_1y_2=\dfrac{48}{4t^2-1}$

又∵ MA_1 与 NA_2 相交于点 P，则 $\begin{cases}\dfrac{y_0}{x_0+2}=\dfrac{y_1}{x_1+2}\\ \dfrac{y_0}{x_0-2}=\dfrac{y_2}{x_2-2}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{x_0-2}{x_0+2}=\dfrac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\dfrac{y_1(ty_2-6)}{y_2(ty_1-2)}$

$=\dfrac{ty_1y_2-6y_1}{ty_1y_2-2y_2}=\dfrac{ty_1y_2-6(y_1+y_2)+6y_2}{ty_1y_2-2y_2}=-3$.即 $x_0=-1$；

所以点 P 在定直线 $x=-1$ 上.

方法三

(1)由题意 $c=2\sqrt{5}$, $e=\sqrt{5}=\dfrac{c}{a}$，则 $a=2$，$b^2=16$

双曲线为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$

(2)设过点 B 的直线 $y=k(x+4)$，联立双曲线得 $(4-k^2)x^2-8k^2x-16-16k^2=0$

则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4-k^2},x_1\cdot x_2=\dfrac{-16(1+k^2)}{4-k^2}$,

$\therefore x_1\cdot x_2+\dfrac{5}{2}(x_1+x_2)=-4$，即 $(x_1+\dfrac{5}{2})(x_2+\dfrac{5}{2})=\dfrac{9}{4}$　(*)

设直线 MA_1： $\dfrac{y}{y_1}=\dfrac{x+2}{x_1+2}$ 设直线 NA_2： $\dfrac{y}{y_2}=\dfrac{x-2}{x_2-2}$,

联立得消去 y 得: $(\dfrac{x+2}{x_1+2})(x_1+4)=(\dfrac{x-2}{x_2-2})(x_2+4)$，即 $\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{(x_1+2)(x_2+4)}{(x_1+4)(x_2-2)}$

代入(*)式，化简得

$$\frac{x+2}{x-2}=\frac{(x_1+2)(x_2+4)}{(x_1+4)(x_2-2)}=\frac{(\frac{9}{4x_2+10}-\frac{1}{2})(x_2+4)}{(\frac{9}{4x_2+10}+\frac{3}{2})(x_2-2)}=\frac{(-2x_2+4)(x_2+4)}{(6x_2+24)(x_2-2)}=-\frac{1}{3}$$

解 $\dfrac{x+2}{x-2}=-\dfrac{1}{3}$ 得 $x=-1$，即 P 在定直线 $x=-1$ 上.

22.（12 分）(1)证明:当 $0<x<1$ 时, $x-x^2<\sin x<x$；

(2)已知函数 $f(x)=\cos ax-\ln\left(1-x^2\right)$,若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点,求 a 的取值范围。

【答案】(1)略

(2) $a<-\sqrt{2}$ 或 $a>\sqrt{2}$

【解析】(1)令 $h(x)=x-x^2-\sin x$，$h(0)=0$，$h'(x)=1-2x-\cos x$，$h'(0)=0$，

$h''(x)=-2+\sin x<0$，所以 $h'(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，

当 $0<x<1$ 时, $h'(x)<h'(0)=0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，

所以当 $0<x<1$ 时, $h(x)<h(0)=0$，所以 $0<x<1$ 时, $x-x^2<\sin x$

令 $g(x)=x-\sin x$，$g(0)=0$，$g'(x)=1-\cos x\geq 0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，

所以当 $0<x<1$ 时, $g(x)>g(0)=0$，所以 $0<x<1$ 时, $\sin x<x$

(2) $f(x)=\cos ax-\ln\left(1-x^2\right)$,

$f(-x)=\cos(-ax)-\ln\left(1-x^2\right)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数。

$f'(x)=-a\sin ax+\dfrac{2x}{1-x^2}$，$f'(0)=0$，

$f'(-x)=-a\sin(-ax)+\dfrac{-2x}{1-x^2}=-f'(-x)$，所以 $f'(x)$ 为奇函数。

$f''(x)=-a^2\cos ax+\dfrac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}, f''(0)=2-a^2$,

$f'''(x)=a^3\sin ax+\dfrac{4(1-x^2)+8x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$,

当 $2-a^2>0$，$-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$ 时，$f''(0)=2-a^2>0$，

令 $t=\min(1,\dfrac{1}{a})$,当 $0<x<t$ 时，$f'''(x)>0$，$f''(x)$ 在 $(0,t)$ 单调递增，

$f''(x)>f''(0)>0$，

$f'(x)$ 在 $(0,t)$ 单调递增，$f'(x)>f'(0)=0$，$f(x)$ 在 $(0,t)$ 单调递增，与 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点矛盾。

当 $2-a^2<0$，$a<-\sqrt{2}$ 或 $a>\sqrt{2}$ 时，$f''(0)=2-a^2<0$，

$a>\sqrt{2}$ 时，令 $t=\min(1,\dfrac{1}{a})$,当 $0<x<t$ 时，$f'''(x)>0$，$f''(x)$ 在 $(0,t)$ 单调递增，

$\lim\limits_{x \to 1} f''(x) = \lim\limits_{x \to 1}(-a^2 \cos ax + \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}) = +\infty$，

所以$\exists x_0 \in (0,t)$，使得$f''(x_0) = 0$，所以当$x \in (0, x_0)$时，使得$f''(x) < 0$，

$f'(x)$在$(0, x_0)$单调递减，$f'(x) < f'(0) = 0$，$f(x)$在$(0, x_0)$单调递减，

因为$f'(x)$为奇函数，所以在$(-x_0, 0)$，$f'(x) > 0$，$f(x)$在$(-x_0, 0)$单调递增，

所以$x = 0$是$f(x)$的极大值点,

$f(x)$为偶函数，所以同理$a < -\sqrt{2}$时，$x = 0$是$f(x)$的极大值点。

当$2 - a^2 = 0$，$a = -\sqrt{2}$或$a = \sqrt{2}$时，$f''(0) = 2 - a^2 = 0$，

$a = \sqrt{2}$时，$f'(x) = -\sqrt{2} \sin \sqrt{2} x + \frac{2x}{1-x^2}$，$x \in (0,1)$时，

$f'(x) > -2x + \frac{2x}{1-x^2} = 2x(\frac{1}{1-x^2} - 1) > 0$，

在$(0,1)$ $f(x)$单调递增，与$x = 0$是$f(x)$的极大值点矛盾。

$f(x)$为偶函数，所以同理$a = -\sqrt{2}$时,，与$x = 0$是$f(x)$的极大值点也矛盾。

综上所述，a的范围是$a < -\sqrt{2}$或$a > \sqrt{2}$