绝密★启用前

2022年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理科）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名和座位号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，集合M满足$\complement_U M=\{1,3\}$，则（　　）

A. $2\in M$　　B. $3\in M$　　C. $4\notin M$　　D. $5\notin M$

2. 已知$z=1-2i$，且$z+a\bar{z}+b=0$，其中a，b为实数，则（　　）

A. $a=1,b=-2$　　B. $a=-1,b=2$　　C. $a=1,b=2$　　D. $a=-1,b=-2$

3. 已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{3},|\vec{a}-2\vec{b}|=3$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

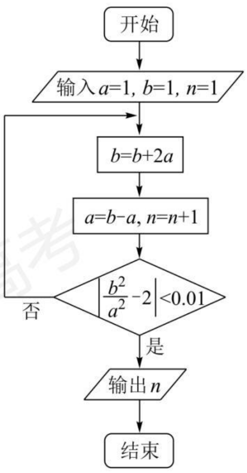
4. 嫦娥二号卫星在完成探月任务后，继续进行深空探测，成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星，为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值，用到数列$\{b_n\}$：$b_1=1+\frac{1}{\alpha_1}$，$b_2=1+\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2}}$，$b_3=1+\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3}}}$，…，依此类推，其中$\alpha_k\in\mathbf{N}^*(k=1,2,\cdots)$．则（　　）

A. $b_1<b_5$　　B. $b_3<b_8$　　C. $b_6<b_2$　　D. $b_4<b_7$

5. 设F为抛物线$C:y^2=4x$的焦点，点A在C上，点$B(3,0)$，若$|AF|=|BF|$，则$|AB|=$（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. $3\sqrt{2}$

6. 执行下边的程序框图，输出的$n=$（　　）



A. 3　　　　B. 4　　　　C. 5　　　　D. 6

7. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 AB,BC 的中点，则（　　）

A. 平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1　　　　B. 平面 $B_1EF\perp$ 平面 A_1BD

C. 平面 $B_1EF\,//$ 平面 A_1AC　　　　D. 平面 $B_1EF\,//$ 平面 A_1C_1D

8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 168，$a_2-a_5=42$，则 $a_6=$（　　）

A. 14　　　　B. 12　　　　C. 6　　　　D. 3

9. 已知球 O 的半径为 1，四棱锥的顶点为 O，底面的四个顶点均在球 O 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　　　B. $\frac{1}{2}$　　　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘，各盘比赛结果相互独立．已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1,p_2,p_3，且 $p_3>p_2>p_1>0$．记该棋手连胜两盘的概率为 p，则（　　）

A. p 与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关　　　　B. 该棋手在第二盘与甲比赛，p 最大

C. 该棋手在第二盘与乙比赛，p 最大　　　　D. 该棋手在第二盘与丙比赛，p 最大

11. 双曲线 C 的两个焦点为 F_1,F_2，以 C 的实轴为直径的圆记为 D，过 F_1 作 D 的切线与 C 的两支交于 M，N 两点，且 $\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$，则 C 的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　　　B. $\frac{3}{2}$　　　　C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$　　　　D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

12. 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)+g(2-x)=5, g(x)-f(x-4)=7$．若 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，$g(2)=4$，则 $\sum_{k=1}^{22} f(k)=$（　　）

A. -21　　　B. -22　　　C. -23　　　D. -24

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作，则甲、乙都入选的概率为___________.

14. 过四点 $(0,0),(4,0),(-1,1),(4,2)$ 中的三点的一个圆的方程为___________.

15. 记函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0, 0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期为 T，若 $f(T)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点，则 ω 的最小值为___________.

16. 已知 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-\mathrm{e}x^2$（$a>0$ 且 $a \neq 1$）的极小值点和极大值点．若 $x_1<x_2$，则 a 的取值范围是___________.

三、解答题：共 0 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

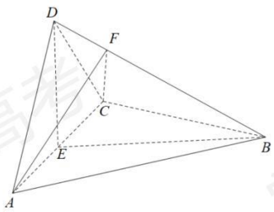
（一）必考题：共 60 分．

17. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，已知 $\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$．

（1）证明：$2a^2=b^2+c^2$；

（2）若 $a=5, \cos A=\frac{25}{31}$，求 $\triangle ABC$ 的周长．

18. 如图，四面体 $ABCD$ 中，$AD \perp CD, AD=CD, \angle ADB=\angle BDC$，$E$ 为 AC 的中点．



（1）证明：平面 $BED \perp$ 平面 ACD；

（2）设 $AB=BD=2, \angle ACB=60^\circ$，点 F 在 BD 上，当 $\triangle AFC$ 的面积最小时，求 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值．

19. 某地经过多年的环境治理，已将荒山改造成了绿水青山．为估计一林区某种树木的总材积量，随机选取了 10 棵这种树木，测量每棵树的根部横截面积（单位：m^2）和材积量（单

位：m^3），得到如下数据：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 0.038, \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 1.6158, \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 0.2474$.

（1）估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量；

（2）求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数（精确到 0.01）；

（3）现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积，并得到所有这种树木的根部横截面积总和为$186\mathrm{m}^2$．已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比．利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值．

附：相关系数 $r = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}, \sqrt{1.896} \approx 1.377$.

20. 已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴、y 轴，且过 $A(0,-2), B\left(\dfrac{3}{2},-1\right)$ 两点.

（1）求 E 的方程；

（2）设过点 $P(1,-2)$ 的直线交 E 于 M，N 两点，过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T，点 H 满足 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$．证明：直线 HN 过定点.

21. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) + ax\mathrm{e}^{-x}$

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 在区间 $(-1,0),(0,+\infty)$ 各恰有一个零点，求 a 的取值范围.

（二）选考题，共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos 2t \\ y = 2\sin t \end{cases}$，（$t$ 为参数），以坐标原点

为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+m=0$.

（1）写出 l 的直角坐标方程；

（2）若 l 与 C 有公共点，求 m 的取值范围.

[选修 4-5：不等式选讲]

23. 已知 a，b，c 都是正数，且 $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}=1$，证明：

（1）$abc\le\frac{1}{9}$；

（2）$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\le\frac{1}{2\sqrt{abc}}$；