

2023 年上海高考数学卷

考生注意:

1. 本试卷共 5 页, 21 道试题, 满分 150 分. 考试时间 120 分钟.
2. 本考试分设试卷和答题纸. 试卷包括试题与答题要求. 作答必须涂(选择题)或写(非选择题)在答题纸上, 在试卷上作答一律不得分.
3. 答卷前, 务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚地填写姓名、准考证号, 并将核对后的条形码贴在指定位置上, 在答题纸反面清楚地填写姓名.

一、填空题(本大题共有 12 题, 满分 54 分, 第 1 ~ 6 题每题 4 分, 第 7 ~ 12 题每题 5 分) 考生应在答题纸的相应位置填写结果

1. 不等式 $|x - 2| < 1$ 的解集为 _____ ;
2. 已知 $\vec{a} = (-2, 3)$, $\vec{b} = (1, 2)$, 求 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____ ;
3. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $a_1 = 3$, $q = 2$, 求 $s_6 =$ _____ ;
4. 已知 $\tan \alpha = 3$, 求 $\tan 2\alpha =$ _____ ;
5. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的值域是 _____ ;
6. 已知当 $z = 1 + i$, 则 $|1 - i \cdot z| =$ _____ ;
7. 已知 $x^2 + y^2 - 4y - m = 0$ 的面积为 π , 求 $m =$ _____ ;
8. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$, 求 $\sin A =$ _____ ;
9. 国内生产总值(GDP)是衡量地区经济状况的最佳指标, 根据统计数据显示, 某市在 2020 年间经济高质量增长, GDP 稳步增长, 第一季度和第四季度的 GDP 分别为 231 和 242, 且四个季度 GDP 的中位数与平均数相等, 则 2020 年 GDP 总额为 _____ ;
10. 已知 $(1 + 2023x)^{100} + (2023 - x)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{100}x^{100}$, 其中 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{100} \in \mathbb{R}$, 若 $0 \leq k \leq 100$ 且 $k \in \mathbb{N}$, 当 $a_k < 0$ 时, k 的最大值是 _____ ;

11. 公园修建斜坡, 假设斜坡起点在水平面上, 斜坡与水平面的夹角为 θ , 斜坡终点距离水平面的垂直高度为 4 米, 游客每走一米消耗的体能为 $(1.025 - \cos\theta)$, 要使游客从斜坡底走到斜坡顶端所消耗的总体能最少, 则 $\theta =$ _____ ;

12. 空间内存在三点 A 、 B 、 C , 满足 $AB = AC = BC = 1$, 在空间内取不同两点 (不计顺序), 使得这两点与 A 、 B 、 C 可以组成正四棱锥, 求方案数为 _____ ;

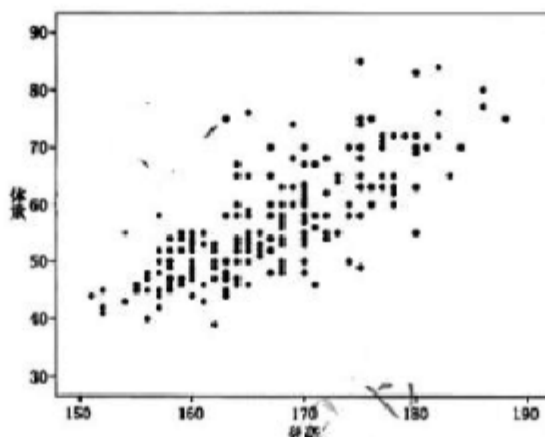
二、选择题 (本题共有 4 题, 满分 18 分, 13、14 每题 4 分, 15、16 题每题 5 分) 每题有且只有一个正确选项考生应在答题纸的相应位置将代表正确选项的小方格涂黑

13. 已知 $P = \{1, 2\}$, $Q = \{2, 3\}$, 若 $M = \{x \mid x \in P \text{ 且 } x \in Q\}$, 则 $M = (\quad)$.

- A. {1}
- B. {2}
- C. {1, 2}
- D. {1, 2, 3}

14. 根据身高和体重散点图, 下列说法正确的是().

- A. 身高越高, 体重越重
- B. 身高越高, 体重越轻
- C. 身高与体重成正相关



D. 身高与体重成负相关

15. 设 $a > 0$, 函数 $y = \sin x$ 在区间 $[a, 2a]$ 上的最小值为 s_a , 在 $[2a, 3a]$ 上的最小值为 t_a , 当 a 变化时, 以下不可能的情形是().

- A. $s_a > 0$ 且 $t_a > 0$
- B. $s_a < 0$ 且 $t_a < 0$

C. $s_q > 0$ 且 $t_a < 0$

D. $s_q < 0$ 且 $t_q > 0$

16. 在平面上, 若曲线 Γ 具有如下性质: 存在点 M , 使得对于任意点 $P \in \Gamma$, 都有 $Q \in \Gamma$ 使得 $|PM| \cdot |QM| = 1$. 则称这条曲线为“自相关曲线”. 判断下列两个命题的真假().

(1) 所有椭圆都是“自相关曲线”.

(2) 存在是“自相关曲线”的双曲线.

A. (1) 假命题; (2) 真命题

B. (1) 真命题; (2) 假命题

C. (1) 真命题; (2) 真命题

D. (1) 假命题; (2) 假命题

三、解答题(本大题共有 5 题, 满分 78 分) 解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤

17. (本题满分 14 分) 本题共有 2 个小题, 第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 8 分.

直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, $AB \parallel DC$, $AB \perp AD$, $AB = 2$, $AD = 3$, $DC = 4$.

(1) 求证: $A_1B \perp$ 面 DCC_1D_1

(2) 若四棱柱体积为 36, 求二面角 $A_1 - BD - A$ 的大小

18. (本题满分 14 分) 本题共有 2 个小题, 第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 8 分.

函数 $f(x) = \frac{x^2 + (3a+1)x + c}{x+a}$ ($a, c \in R$)

(1) 当 $a = 0$ 是, 是否存在实数 c , 使得 $f(x)$ 为奇函数

(2) 函数 $f(x)$ 的图像过点 $(1, 3)$, 且 $f(x)$ 的图像 x 轴负半轴有两个交点求实数 a 的取值范围

19. (本题满分 14 分) 本题共有 2 个小题, 第 1 小题满分 2 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 8 分.

21 世纪汽车博览会在上海 2023 年 6 月 7 日在上海举行, 下表为某汽车模型公司共有 25 个汽车模型, 其外观和内饰的颜色分布如下表所示:

	红色外观	蓝色外观
棕色内饰	12	8
米色内饰	2	3

- (1)若小明从这些模型中随机拿一个模型,记事件 A 为小明取到的模型为红色外观,事件 B 取到模型有棕色内饰
求 $P(B)$ 、 $P(B/A)$,并据此判断事件 A 和事件 B 是否独立
- (2)该公司举行了一个抽奖活动,规定在一次抽奖中,每人可以一次性从这些模型中拿两个汽车模型,给出以下假设:1、拿到的两个模型会出现三种结果,即外观和内饰均为同色、外观内饰都异色、以及仅外观或仅内饰同色;2、按结果的可能性大小,概率越小奖项越高;3)奖金额为一等奖 600 元,二等奖 300 元,三等奖 150 元,请你分析奖项对应的结果,设 X 为奖金额,写出 X 的分布列并求出 X 的数学期望

20. (本题满分 16 分)本题共有 3 个小题,第 1 小题满分 4 分,第 2 小题满分 6 分,第 3 小题满分 6 分.

曲线 $\Gamma: y^2 = 4x$,第一象限内点 A 在 Γ 上, A 的纵坐标是 a .

- (1)若 A 到准线距离为 3,求 a ;
- (2)若 $a = 4$, B 在 x 轴上, AB 中点在 Γ 上,求点 B 坐标和坐标原点 O 到 AB 距离;
- (3)直线 $l: x = -3$,令 P 是第一象限 Γ 上异于 A 的一点,直线 PA 交 l 于 Q , H 是 P 在 l 上的投影,若点 A 满足“对于任意 P 都有 $|HQ| > 4$ ”求 a 的取值范围.

21.(本题满分 18 分)本题共有 3 个小题,第 1 小题满分 4 分,第 2 小题满分 6 分,第 3 小题满分 8 分.

令 $f(x) = \ln x$,取点 $(a_1, f(a_1))$ 过其曲线 $y = f(x)$ 做切线交 y 轴于 $(0, a_2)$,取点 $(a_2, f(a_2))$ 过其做切线交 y 轴于 $(0, a_3)$,若 $a_3 < 0$ 则停止,以此类推,得到数列 $\{a_n\}$.

(1)若正整数 $m \geq 2$,证明 $a_m = \ln a_{m-1} - 1$;

(2)若正整数 $m \geq 2$,试比较 a_m 与 $a_{m-1} - 2$ 大小;

(3)若正整数 $k \geq 3$,是否存在 k 使得 $a_1, a_2 \cdots a_k$ 依次成等差数列?若存在,求出 k 的所有取值,若不存在,试说明理由.